Kl. XI

Detyra 1. Të gjenden të gjithë çiftet (m,n) të numrave natyrorë të tillë që $m^2+1=n^2+2016$.

Zgjidhja. Barazimin e dhënë e shkruajmë kështu

$$m^2-n^2=2015 \text{ d.m.th. } (m-n)(m+n)=2015.$$

Meqë m,n janë numra natyrorë, vlen $m-n < m+n$. Faktorët e thjeshtë të numrit 2015 janë $5, 13$ dhe 31 (sepse $2015 = 5\cdot 13 \cdot 31$). Prandaj, numrin 2015 si prodhim të dy faktorëve mund ta shkruajmë kështu:

a) $2015=1\cdot 2015$; b) $2015 = 5\cdot 403$; c) $2015=13\cdot 155$; d) $2015 = 31 \cdot 65$.

Meqë $(m-n)(m+n)=2015$, nga:

a) $(m-n)(m+n)=2015 = 1\cdot 2015 \Rightarrow m-n = 1 \wedge m+n=2015 \Rightarrow m = 1008 \wedge n = 1007 \Rightarrow (m,n)=(1008,1007)$;

b) $(m-n)(m+n)=2015 = 5\cdot 403 \Rightarrow m-n = 5 \wedge m+n = 403 \Rightarrow m = 204 \wedge n = 199 \Rightarrow (m,n) = (204,199)$;

c) $(m-n)(m+n)=2015 = 13\cdot 155 \Rightarrow m-n = 13 \wedge m+n = 155 \Rightarrow m = 84 \wedge n = 71 \Rightarrow (m,n) = (84,71)$;

d) $(m-n)(m+n)=2015 = 31\cdot 65 \Rightarrow m-n = 31 \wedge m+n = 65 \Rightarrow m = 48 \wedge n = 17 \Rightarrow (m,n) = (48,17)$; $

Përfundimisht, $(m,n) \in \{(1008,1007),(204,199),(84,71),(48,17)\}$. ■

Detyra 2. Të gjendet shuma e të gjithë numrave treshifrorë pozitivë që nuk plotpjesëtohen me 13.

Zgjidhje. Shënojmë me S_n shumën e të gjithë numrave treshifrorë pozitivë dhe me S'_m shumën e të gjithë numrave treshifrorë që plotpjesëtohen me 13, d.m.th.

$$S_n = 100+1001+1002+\cdots+999 \text{ dhe } S'_m = 104+117+130+\cdots+988.$$

(104 dhe 988 janë numri më i vogël dhe më i madh treshifrorë që plotpjesëtohet me 13). Atëherë

$$S=S_n-S'_m$$

është shuma (e kërkuar) e të gjithë numrave treshifrorë që nuk plotpjesëtohen me 13.

S_n është shuma e n anëtarëve të parë të vargut arithmetik anëtari i parë i të cilit është $a_1 = 100$, diferenca e të cilit është $d = 1$ dhe anëtari i n-të i të cilit është $a_n = 999$. Prandaj, nga

$a_n = a_1 + (n-1)d$ rrjedh se $999 = 100 + (n-1) \cdot 1$ prej nga $n = 900$. Kështu,

$$S_n = S_{900} = \frac{900}{2}(a_1 + a_n) = 450(100 + 999) = 450 \cdot 1099 = 494550.$$

S'_m është shuma e m anëtarëve të parë të vargut arithmetik anëtari i parë i të cilit është $b_1 = 104$, anëtari i m-të i të cilit është $b_m = 988$ dhe diferenca e të cilit është $d = 13$. Prandaj, nga $b_m = b_1 + (m-1)d$ rrjedh se $988 = 104 + (m-1) \cdot 13$, prej nga $m = 69$. Kështu,

$$S'_m = S'_{69} = \frac{69}{2}(b_1 + b_m) = \frac{69}{2}(104 + 988) = \frac{69 \cdot 1092}{2} = 69 \cdot 546 = 37674.$$

Përfundimisht, $S = S_n - S'_m = 494550 - 37674 = 456876$ është shuma e kërkuar. ■

Detyra 3. Nëse α është kënd i ngushtë dhe $a \geq 0, b \geq 0$, të vërtetohet pabarazimi

$$\left(a + \frac{b}{sin\alpha}\right) \cdot \left(b + \frac{a}{cos\alpha}\right) \geq a^2 + b^2 + 3ab.$$

Zgjidhje. Kemi:

$$\left(a + \frac{b}{sin\alpha}\right) \cdot \left(b + \frac{a}{cos\alpha}\right) = ab + \frac{a^2}{cos\alpha} + \frac{b^2}{sin\alpha} + \frac{ab}{sin\alpha cos\alpha} =$$

$$= ab + \frac{a^2}{cos\alpha} + \frac{b^2}{sin\alpha} + \frac{2ab}{sin2\alpha}. \qquad (1)$$

Meqë nga $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ rrjed□ se $0 < sin\alpha < 1$, $0 < cos\alpha < 1$ d□e $0 < sin2\alpha < 1$, e prej këtu:

$$\frac{1}{sin\alpha} > 1, \quad \frac{1}{cos\alpha} > 1, \quad \frac{1}{sin2\alpha} > 1. \qquad (2)$$

Tash, nga (1) dhe (2) rrjedh se

$$\left(a + \frac{b}{sin\alpha}\right) \cdot \left(b + \frac{a}{cos\alpha}\right) \geq ab + a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 3ab,$$

çka duhej vërtetuar. ■

Detyra 4. Të zgjidhet ekuacioni: $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$.

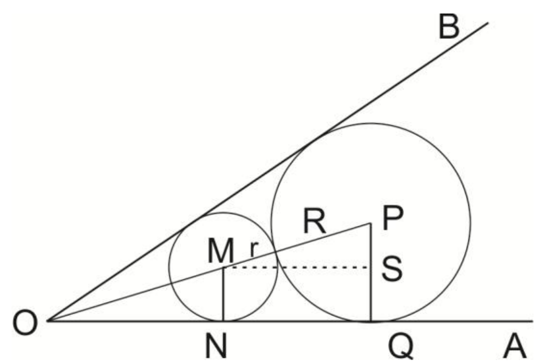
Zgjidhja. Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me :

$$\log_2(4^x+4) = x\log_2 2 + \log_2(2^{x+1}-3) \Leftrightarrow \log_2(4^x+4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1}-3) \Leftrightarrow \log_2(4^x+4) = \log_2[2^x\cdot(2^{x+1}-3)] \Leftrightarrow (4^x+4 = 2^x\cdot(2^{x+1}-3)) \Leftrightarrow (2^x)^2+4 = 2\cdot(2^x)^2-3\cdot 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2\text{-}3\cdot 2^x-4=0 \Leftrightarrow (2^x = t>0 \wedge t^2-3t-4=0) \Leftrightarrow (2^x=t>0 \wedge (t-4)(t+1)=0 \Leftrightarrow (2^x=t>0 \wedge (t=4 \vee t=-1) \Leftrightarrow 2^x=t=4 \Leftrightarrow 2^x=2^2 \Leftrightarrow x=2.$$

Pra, $x=2$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.■

Detyra 5. Në këndin $\measuredangle AOB = 60^0$ janë brendashkruar dy rrathë të cilët i takojnë krihët e këtij këndi dhe takohen nga jashtë ndërmjet veti. Në qoftë se $r=1$ është gjatësia e rrezës së rrethit të vogël, të gjendet gjatësia R e rrethit të madh.

Zgjidhje. Në figurën vijuese



le të jenë $r=|MN|=1$ dhe $R=|PQ|$ gjatësitë e rrezeve të rrathëve të dhënë dhe M, P qendrat e tyre. Meqë këta rrathë i takojnë krihët e këndit $\sphericalangle AOB$ përfundojmë se qendrat e tyre i takojnë simetrales së këtij këndi, d.m.th. OP është simetrale e këndit $\sphericalangle AOB$. Prandaj, $\sphericalangle AOP = \frac{1}{2}\sphericalangle\ AOB = 30^0$. Le të jetë $MS \parallel OA$. Atëherë, $\sphericalangle SMN = \sphericalangle AOP = 30^0$dhe nga trekëndëshi kënddrejtë $\triangle MSP$ rrjedh se

$$\sin(\measuredangle SMP) = \frac{|PS|}{|MP|} \Longrightarrow sin30^0 = \frac{|PS|}{|MP|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|PS|}{|MP|} \Longrightarrow |MP| = 2|PS|.$$

Prej këtu, meqë $|MP| = r+R$ dhe $|PS| = R-r$, përfundojmë se

$$r + R = 2(R - r) \Longrightarrow R = 3r = 3 \cdot 1 = 3. \quad \blacksquare$$