



Fakulteti i Shkencave Matematike - Natyrore

Provimi pranues nga Matematika - Departamenti i Matematikës (02.10.2020)
Programet Shkencë kompjuterike dhe Matematikë financiare

KUJDES: Të gjitha detyrat shtjellohen në hapsirën e paracaktuar, përfshirë **përgjigjet (rezultatet)** dhe **patjetër duhet të jenë të shoqëruara me zgjidhjen përkatëse të detyrës**. Në të kundërtën detyra nuk vlerësohet.

Emri dhe Mbiemri _____ Nr. i dosjes _____

1. Zgjidhjet e barazimit $x^2 - x - 2 = x - 4$ janë:

Zgjidhje:

Nga ekuacioni $x^2 - x - 2 = x - 4$ marrim $x^2 - x - 2 - x + 4 = 0$, pra $x^2 - 2x + 2 = 0$, Andaj duke përdorur formulat e mirenjohura për gjetjen e zerove të një ekuacioni kuadratik kemi

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \mp \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-(-2) \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \mp 2i}{2} = 1 \mp i$$

Pra $x_1 = 1 + i$ dhe $x_2 = 1 - i$

2. Nëse x_1, x_2 , janë zgjidhjet e ekuacionit $x^2 + 2x + 6 = 0$, atëherë $x_1^4 + x_2^4$ është e barabartë me:

Zgjidhje :

Duke përdorur formulat e Vietit kemi $x_1 + x_2 = -2$ dhe $x_1x_2 = 6$

Nga

$$\begin{aligned}x_1^4 + x_2^4 &= x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 \\ &= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = ((-2)^2 - 2 \cdot 6)^2 - 2 \cdot 6^2 = -8\end{aligned}$$

Zgjidhja e detyrës mund të merret edhe nëse se pari gjenden rrenjet e ekuacionit të mesipër përmes formulave të ditura e pastaj kalkulohen vlerat e tyre, porse rrenjet nuk janë reale në këtë rast dhe gjatë kalkulimeve mund të bëhen gabime më lehtë.

3. Çmimi i një malli prej 10 eurosh që rritet dy herë nga 10% e mandej zvogëlohet dy herë nga 10% është:

Zgjidhje:

Pas rritjes per 10% , cmimi i ri do te jete $10 + 10\% 10 = 11$.

Rritja e dyte do te jete $11 + 10\% 11 = 11 + 1,1 = 12,1$

Pas zvoglimit per 10% marrim $12,1 - 10\% 12,1 = 12,1 - 1,21 = 10,89$

Zbritja e fundit prej 10% na jep $10,89 - 10\% 10,89 = 10,89 - 1,089 = 9.801$

4. Babai dhe e bija kanë së bashku 35 vite. Pas 20 viteve babai është dy herë më i vjetër se e bija. Nga sa vite i kanë secili?

Zgjidhje:

Shenojme me x - moshen e babit dhe me y - moshen e vajzes. Atere do te kemi keto te dhena

$$x + y = 35$$

$$x + 20 = 2(y + 20)$$

Si rrjedhim marrim

$$x = 2y + 20$$

E pasi ta shtojme nga nje y marrim

$$x + y = 3y + 20$$

Pra

$$3y + 20 = 35$$

Nga ku marrim $y = 5$ dhe $x = 30$

5. Paraqitja binare e numrit 346 është:

Zgjidhje:

Fuqia me e madhe e 2 qe nuk e kalon 346 eshte 8, pra $2^8 = 256 < 346 < 2^9 = 512$

Meqe $346-256=90$, atehere fuqia me madhe e 2 qe nuk e kalon 90 eshte 6, pra $2^6 < 90$.

Meqe $90-64=26$, dhe fuqia me madhe e 2 qe nuk e kalon 26 eshte 4, pra $2^4 = 16 < 26$, dhe $26-16=10$. Tani $2^3 = 8 < 10$ dhe $10-8=2$.

Pra $346=2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (101011010)_2$

6. Janë dhënë funksionet $f(x) = 2-x$ dhe $g(x) = 1-x$. Gjej $f(g(x)) - g(f(x))$.

Zgjidhje:

Nga $f(g(x))=2-g(x)=2-(1-x)=1+x$ dhe $g(f(x))=1-f(x)=1-(2-x)=x-1$ kemi

$$f(g(x))-g(f(x))=1+x-(x-1)=2$$

7. Zgjidhjet e barazimit eksponencial $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$ janë:

Zgjidhje :

Nga ekuacioni $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$ marrim

$$4^x(4^3 - 13 \cdot 4) = 2^{3x}(2^{-1} - 2^{-3})$$

$$12 \cdot 4^x = \frac{3}{8} 2^{3x}$$

$$12 \cdot 4^x = \frac{3}{8} 8^x$$

$$\left(\frac{4}{8}\right)^x = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{4}{8}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Pra $x = 5$

8. Pabarazimi $2x^2 - 2 < x + 4$ ka për zgjidhje bashkësinë:

Zgjidhje:

Meqe zgjidhjet e barazimit $2x^2 - x - 6 = 0$, (pas përdorimit të formulave perkatëse) janë $-\frac{3}{2}, 2$
Atehere $2x^2 - x - 6 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2) < 0$. Duke i ndarë rastet perkatëse kur njëri nga faktoret është negativ dhe tjetri pozitiv dhe në fund duke marrë prerjet e nevojshme, ose duke pasqyruar se grafiku i funksionit kuadratik, në rastin kur koeficienti pranë fuqisë më të madhe është pozitiv, në mes të dy zerove të tij është nën boshtin Ox, atëhere përfundojmë se zgjidhja është intervali $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

9. Ekuacioni i drejtëzës që kalon nëpër origjinë dhe është normal në drejtëzën $2x + y - 3 = 0$ është:

Zgjidhje :

Ekuacioni i drejtezes qe kalon neper origjine (pra neper piken (0,0)) eshte

$$y - 0 = k(x - 0)$$

Pra

$$y = kx$$

Meqe drejtezat jane reciprokisht normale, atehere nga

$$2x + y - 3 = 0$$

Kemi

$$y = -2x + 3$$

Pra $(-2)k = -1$ rrjedh se $k = \frac{1}{2}$, andaj drejteza e kerkuar eshte $y = \frac{1}{2}x$.

10. Zgjidhjet e jobarazimit $\log(\sin x) > \frac{1}{2}\log 3 + \log(\cos x)$ në intervalin $(0, 2\pi)$ janë:

Zgjidhje:

Kushtet fillestare janë $\sin x > 0$ dhe $\cos x > 0$ që në intervalin $(0, 2\pi)$ na japin kushtet

$$x \in (0, \pi) \cap \left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Kushti tjetër fitohet nga fakti se $\sin x > \sqrt{3} \cos x$, pra

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x > 0$$

Ose

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x > 0$$

Që implikon se

$$\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x > 0$$

Pra $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$ rjedh se $x \in \left(\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right)$.

Zgjidhja përfundimtare do të jetë $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left(\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!