



Fakulteti i Shkencave Matematike - Natyrore

Provimi pranues nga Matematika - Departamenti i Matematikës (02.10.2020)
Programi Matematikë

KUJDES: Të gjitha detyrat shtjellohen në hapsirën e paracaktuar, përfshirë **përgjigjet (rezultatet)** dhe **patjetër duhet të jenë të shoqëruara me zgjidhjen përkatëse të detyrës**. Në të kundërtën detyra nuk vlerësohet.

Emri dhe Mbiemri _____ Nr. i dosjes _____

1. Zgjidhjet e barazimit $x^2 - x - 6 = x - 3$ janë:

Zgjidhje:

Nga ekuacioni $x^2 - x - 6 = x - 3$ marrim $x^2 - x - 6 - x + 3 = 0$, pra $x^2 - 2x - 3 = 0$, Andaj duke përdorur formulat e mirenjohura për gjetjen e zerove të një ekuacioni kuadratik kemi

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \mp \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-(-2) \mp \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \mp 4}{2} = 1 \mp 2$$

Pra $x_1 = 1 + 2 = 3$ dhe $x_2 = 1 - 2 = -1$

2. Inekuacioni $2x^2 - x - 6 < 0$ ka për zgjidhje:

Zgjidhje:

Meqe zgjidhjet e barazimit $2x^2 - x - 6 = 0$, (pas perdorimit te formulave perkatese) jane $-\frac{3}{2}, 2$
Atehere $2x^2 - x - 6 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2) < 0$. Duke i ndare rastet perkatese kur njeri nga faktoret
eshte negative e tjetri pozitiv dhe ne fund duke marre prerjet e nevojshem, ose duke pas parasysht
se grafiku i funksionit kuadratik, ne rastin kur koeficienti prane fuqise me te madhe eshte pozitiv,
ne mes te dy zerove te tij eshte nen boshtin Ox, atehere perfundojme se zgjidhja eshte
inetrvali $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

3. Në rrethin me rreze 10 është brendashkruar një katror. Syprina e tij është:

Zgjidhje:

Meqe katrori është brendashkruar në rreth, atëherë ai rreth është i jashtëshkruar rreth atij katrorit, e dihet se të rrethi i jashtëshkruar i katrorit, diagonalja e katrorit është sa diametri i atij rrethi pra $d = 2 \cdot 10 = 20$. Poashtu dihet se në një katërkëndësh ku diagonalet janë reciprokisht normale, syprina e tij do të jetë gjysma e prodhimit të diagonaleve, andaj në rastin tonë $S = \frac{1}{2}d^2 = 200$.

4. Zgjidhjet e barazimit $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$ janë:

Zgjidhje :

Nga ekuacioni $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$ marrim

$$4^x(4^3 - 13 \cdot 4) = 2^{3x}(2^{-1} - 2^{-3})$$

$$12 \cdot 4^x = \frac{3}{8} 2^{3x}$$

$$12 \cdot 4^x = \frac{3}{8} 8^x$$

$$\left(\frac{4}{8}\right)^x = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{4}{8}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Pra $x = 5$

5. Zgjidhjet e pabarazimit $\log(\sin x) > \frac{1}{2}\log 3 + \log(\cos x)$ në intervalin $(0, 2\pi)$ janë:

Zgjidhje:

Kushtet fillestare janë $\sin x > 0$ dhe $\cos x > 0$ që në intervalin $(0, 2\pi)$ na japin kushtet

$$x \in (0, \pi) \cap \left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Kushti tjetër fitohet nga fakti se $\sin x > \sqrt{3} \cos x$, pra

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x > 0$$

Ose

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x > 0$$

Që implikon se

$$\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x > 0$$

Pra $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$ rjedh se $x \in \left(\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right)$.

Zgjidhja përfundimtare do të jetë $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left(\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Ekuacioni i drejtëzës që kalon nëpër origjinë dhe është normal në drejtëzën $2x + y - 3 = 0$ është:

Zgjidhje :

Ekuacioni i drejtezes qe kalon neper origjine (pra neper piken $(0,0)$) eshte

$$y - 0 = k(x - 0)$$

Pra

$$y = kx$$

Meqe drejtezat jane reciprokisht normale, atehere nga

$$2x + y - 3 = 0$$

Kemi

$$y = -2x + 3$$

Pra $(-2)k = -1$ rrjedh se $k = \frac{1}{2}$, andaj drejteza e kerkuar eshte $y = \frac{1}{2}x$.

7. Nëse $f(2x+1) = x$, atëherë $f(f(x))$.

Zgjidhje :

Duke marrë zëvendësimin $2x + 1 = t$ rjedh se $x = \frac{t-1}{2}$ andaj do te kemi

$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$

E si rrjedhim

$$f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{2} = \frac{\frac{x-1}{2}-1}{2} = \frac{x-3}{4}$$

8. Babai dhe e bija kanë së bashku 35 vite. Pas 20 viteve babai është dy herë më i vjetër se e bija. Nga sa vite i kanë secili?

Zgjidhje:

Shenojme me x - moshën e babit dhe me y - moshën e vajzes. Atere do të kemi keto të dhena

$$x + y = 35$$

$$x + 20 = 2(y + 20)$$

Si rrjedhim marrim

$$x = 2y + 20$$

E pasi ta shtojmë nga një y marrim

$$x + y = 3y + 20$$

Pra

$$3y + 20 = 35$$

Nga ku marrim $y = 5$ dhe $x = 30$

9. Nëse x_1, x_2 , janë zgjidhjet e ekuacionit $x^2 + 2x + 6 = 0$, atëherë $x_1^4 + x_2^4$ është e barabartë me:

Zgjidhje :

Duke përdorur formulat e Vietit kemi $x_1 + x_2 = -2$ dhe $x_1x_2 = 6$

Nga

$$\begin{aligned}x_1^4 + x_2^4 &= x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 \\ &= ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = ((-2)^2 - 2 \cdot 6)^2 - 2 \cdot 6^2 = -8\end{aligned}$$

Zgjidhja e detyrës mund të merret edhe nëse se pari gjenden rrenjet e ekuacionit të mesipër përmes formulave të ditura e pastaj kalkulohen vlerat e tyre, porse rrenjet nuk janë reale në këtë rast dhe gjatë kalkulimeve mund të bëhen gabime më lehtë.

10. Tregoni se prodhimi i katër numrave të njëpasnjëshëm natyrorë plotpjesëtohet me 24.

Zgjidhje :

Meqe $24 = 3 \cdot 8$ dhe 3 dhe 8 janë relativisht të thjeshtë, mjafton të tregojmë se prodhimi i katër numrave të njëpasnjëshëm natyrorë, plotpjesëtohet me 3 dhe 8. Le të jenë $n, n+1, n+2, n+3$, numrat natyrorë të njëpasnjëshëm.

Meqe gjatë pjesimit me 3 një numër jep mbetjet 0, 1 ose 3 atëherë kemi këto raste

Per $n=3k$, prodhimi i atyre numrave plotpjesëtohet me 3 sepse vet n plotpjesëtohet me 3.

Per $n=3k+1$ kemi $n+2=3k+3=3(k+1)$, andaj edhe në këtë rast prodhimi i tyre plotpjesëtohet me 3.

Per $n=3k+2$, kemi $n+1=3(k+1)$, andaj edhe në këtë rast prodhimi në fjale plotpjesëtohet me 3.

Perkitazi me plotpjesëtueshmërinë me 8, shikojmë rastet e mbetjeve gjatë pjesimit me 4, të cilat janë 0,1,2 ose 3.

Per $n=4k$ rjedh se $n+2=2(2k+1)$, andaj $n(n+2)$ plotpjesëtohet me 8, pra edhe prodhimi në fjale plotpjesëtohet me 8.

Per $n=4k+1$ rjedh se $n+1=2(2k+1)$ dhe $n+3=4(k+1)$

Per $n=4k+2$ rjedh se $n+2=4(k+1)$ andaj $n(n+2)$ plotpjesëtohet me 8, pra edhe $n(n+1)(n+2)(n+3)$ plotpjesëtohet me 8.

Per $n=4k+3$ kemi $n+1=4(k+1)$ dhe $n+3=2(2k+3)$ andaj $(n+1)(n+3)$ plotpjesëtohet me 8.

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!

Kjo faqe është lënë qëllimisht e zbrazët. Mund të përdoret për llogaritje. Nuk guxon të shkëputet!