Detyra 1. Të gjenden të gjitha treshet e numrave të plotë (x, y, z) që janë zgjidhje të ekuacionit

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6$$

Zgjidhje. Ekuacini i dhënë është ekuivalent me

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 12$ ~$[(x^2 + 2xy + y^2)$+$(y^2 + 2yz + z^2)$ + $(z^2 + 2zx + x^2)]$ = 12 ~ $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 12.$

Numri 12 mund të paraqitet si shumë e katrorëve të tre numrave të plotë vetëm në një mënyrë të vetme: $12 = 4 + 4 + 4 = (\pm2)^2 + (\pm2)^2 + (\pm2)^2$. Prandaj, nga ekuacioni i fundit rrjedh se $x + y = \pm2$, $y + z = \pm2$ dhe $z + x = \pm2$, kështu që (x, y, z) është zgjidhje e sistemeve vijuese:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=2 \\ z+x=2 \end{cases}, \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=2 \\ z+x=-2 \end{cases}; \begin{cases} x+y=-2 \\ y+z=2 \\ z+x=2 \end{cases}; \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=-2 \\ z+x=2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=-2 \\ z+x=-2 \end{cases}; \begin{cases} x+y=-2 \\ y+z=-2 \\ z+x=2 \end{cases}; \begin{cases} x+y=-2 \\ y+z=2 \\ z+x=-2 \end{cases}; \begin{cases} x+y=-2 \\ y+z=-2 \\ z+x=-2 \end{cases}$$

Meqë $(1,1,1), (-1,3-1), (-1,-1,3), (3,-1,-1), (1,1,-3), (1,-3,1), (-3,1,1)$ dhe $(-1,-1,-1)$ janë zgjidhjet e sistemeve të mësipërme përkatësissht, përfundojmë se

$$\{(1,1,1), (-1,3-1), (-1,-1,3), (3,-1,-1), (1,1,-3), (1,-3,1), (-3,1,1), (-1,-1,-1)\}$$

Është bashkësia e të gjitha tresheve të renditura të kërkuara.■

Detyra 2. Të vërtetohet se numri 2017^{2016} - 2016^{2017} plotpjesëtohet me 5.

Zgjidhje 1. Meqë 2017^{2016} = $(2017^4)^{504}$ dhe meqë numri 2017^4 përfundon me shifrën 1 (sepse 7^4 përfundon me 1), përfundojmë se edhe numri 2017^{2016} përfundon me shifrën 1. Nga ana tjetër, numri 2016^{2017} përfundon me shifrën 6 (si fuqi e numrit 2016 që përfundon me 6). Prandaj, numri 2017^{2016} - 2016^{2017} përfundon me 5 (si ndryshim i numrit që përfundon me 1 dhe i numrit që përfundon me 6), dhe, si i tillë, ai plotpjesëtohet me 5. ■

Detyra 3. Largesa ndërmjet vendeve A dhe B është $408\ km$. Nga vendi A në drejtim të vendit B lëviz një motoçiklist kurse prej vendit B në drejtim të vendit A lëviz një biçiklist. Në qoftë se motoçiklisti niset 2 orë më heret se biçiklisti, ata do të takohen pas 7 orësh të fillimit të lëvizjes së çiklistit. Në qoftë se biçiklisti niset 2 orë më heret se motoçiklisti, ata do të takohen pas 8 orësh nga fillimi i lëvizjes së motoçiklistit. Të gjendet shpejtësia e lëvizjes së motoçiklistit dhe ajo e biçiklistit në qoftë se ato shpejtësi janë konstante gjatë gjithë kohës.

Zgjidhje. Le të jetë s_1 gjatësia e rrugës që e kalon motoçiklisti deri në takimin me biçiklistin dhe s_2 gjatësia e rrugës që kalon biçiklisti deri në takim me motoçiklistin. Po ashtu, $x\ km/h$ le të jetë shpejtësia e motoçiklistit kurse $y\ km/h$ shpejtësia e biçiklistit.

Meqë kur motoçiklisti niset 2 orë më heret se biçiklisti, ata takohen pas 7 orësh të fillimit të lëvizjes së biçiklistit, përfundojmë se motoçiklisti rrugën s_1 me shpejtësi $x\ km/h$ e kalon për $7+2=9$ orë kurse biçiklisti rrugën s_2 me shpejtësi $y\ km/h$ e kalon për 7 orë. Prandaj,

$$s_1 = 9x \ \ km \qquad dhe \quad s_2 = 7y \ \ km.$$

Meqë kur biëiklisti niset 2 orë më heret se motoçiklisti, ata takohen pas 8 orësh të fillimit të lëvizjes së motoçiklistit, përfundojmë se motoçiklisti rrugën s_1 me shpejtësi $x\ km/h$ e kalon për 8 orë kurse biçiklisti rrugën s_2 me shpejtësi $y\ km/h$ e kalon për $8+2=10$ orë. Prandaj,

$$s_1 = 8x\ km \qquad dhe \qquad s_2 = 10y \ \ km.$$

Meqë e gjithë rruga prej vendit A deri në vendin B është e gjatë $s_1 + s_2 = 408 \ \ km$, përfundojmë që, në dy rastet e mësipërme, kemi

$$9x + 7y = 408 \qquad dhe \qquad 8x + 10y = 408.$$

Zgjidhja e këtij sistemi është $(x, y) = (36{,}12)$. Përfundimisht, shpejtësia e motoçiklistit është $x = 36\ km/h$ kurse shpejtësia e biçiklistit është $y = 12\ km/h$. ■

Detyra 4. Le të jetë $f: (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ funksion monotono zvogëlues. Në qoftë se

$$f(2a^2+a+1) < f(3a^2-4a+1)$$

të gjendet intervali të cilit i takon a.

%(Xiang Bin, Lee Peng Yee, Mathematical Olympiads in China; 2005 (Jangxi), det.8, fq.43).

Zgjidhje. Meqë f është i përkufizuar në intervalin $(0, +\infty)$, përfundojmë se duhet të jetë $2a^2+a+1>0$ dhe $3a^2 - 4a + 1 > 0$. Meqë për çdo $a \in \boldsymbol{R}$ është $2a^2+a+1 = 2(a+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{8}>0$, mbetet të jetë $3a^2 - 4a + 1 > 0$. Meqë

$$3a^2 - 4a + 1 = 3a^2-3a-a+1 = 3a(a-1)-(a-1) = (3a-1)(a-1)$$

duhet të jetë $(3a-1)(a-1) > 0$ prej nga rrjedh se

$$(3a-1>0 \ \wedge a-1>0) \vee (3a-1<0 \ \wedge a-1>0) \Leftrightarrow \left(a>\frac{1}{3} \wedge a>1\right) \vee \left(a<\frac{1}{3} \wedge a<1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a>1 \ \vee a<\frac{1}{3}.$$

Pra, $$a \in \left(-\infty, \tfrac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty). \qquad (1)$$

Nga ana tjetër, nga $f(2a^2 + a + 1) < f(3a^2 - 4a + 1)$, meqë f është monotono zvogëlues, rrjedh se

$2a^2 + a + 1 > 3a^2 - 4a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 5a < 0 \Leftrightarrow a(a-5) < 0\ (a > 0 \wedge a - 5 < 0) \vee (a < 0 \wedge a - 5 > 0) \Leftrightarrow (a > 0 \wedge a < 5) \vee (a < 0 \wedge a > 5) \Leftrightarrow a \in (0,5) \cup \emptyset = (0,5)$,

d.m.th. $$a \in (0,5). \qquad (2)$$

Nga (1) dhe (2) rrjedh se

$$a \in \left[\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)\right] \cap (0,5) = \left[\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cap (0,5)\right] \cup [(1, +\infty) \cap (0,5)] = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (1,5).$$

Përfundimisht, $a \in \left(0, \tfrac{1}{3}\right) \cup (1,5)$. ■

Detyra 5. Të vërtetohet se për çdo numër të plotë $n > 2$ fuqia e n-të e gjatësisë së hipotenuzës së një trekëndëshi kënddrejtë është më e madhe se shuma e fuqive të n-ta të kateteve të atij trekëndëshi.

Zgjidhje. Le të jenë a, b, c gjatësitë e dy kateteve dhe hipotenuzës së trekëndëshit kënddrejtë, përkatësisht. Duhet vërtetuar se për çdo numër të plotë $n > 2$ vlen

$$c^n > a^n + b^n\ .$$

Vërtet,sipas teoremës së Pitagorës vlen $c^2 = a^2 + b^2$ kështu që:

$$c^n = c^2 \cdot c^{n-2} = (a^2 + b^2) \cdot c^{n-2} = a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2}.$$

Meqë $c > a$ dhe $c > b$, rrjedh se $c^{n-2} > a^{n-2}$ dhe $c^{n-2} > b^{n-2}$. Duke pasur parasysh këte, nga barazimi i mësipërm rrjedh se

$$c^n = a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} = a^n + b^n,$$

d.m.th. $c^n > a^n + b^n$, çka duhej vërtetuar. ■