Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Kodi: ___________________

OMK 2017 - KLASA E 12-TË

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

25 shkurt 2017

Detyra 1. Vargu $(a_n)_{n\in N}$ është dhënë në mënyrë rekurzive me $a_1 = 1$,

$$a_n = a_1 \ldots a_{n-1} + 1, \quad \text{për } n \geq 2.$$

Caktoni numrin më të vogël real M të tillë që

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M, \text{ për çdo } m \in N.$$

Detyra 2. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve

$$\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \; tgz = 2 \\ tgy \; tgz = 18. \end{cases}$$

Detyra 3. Le të jetë $a \geq 2$ numër natyralë i fiksuar, ndërsa me a_n le të shënojmë vargun

$a_n = a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$ (p.sh. $a_1 = a$, $a_2 = a^a$, $a_3 = a^{a^a}$, etj.). Tregoni se $(a_{n+1} - a_n) | (a_{n+2} - a_{n+1})$ për çdo numër natyralë n.

Detyra 4. Të vërtetohet identiteti

$$\sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{2} \cdot 2^{n-1}.$$

Detyra 5. Drejtëzat e përcaktuara nga brinjët AB dhe CD të katërkëndëshit konveks $ABCD$ priten në pikën P. Vërtetoni se $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, ku $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ janë masat e këndeve të brendshme te kulmet A, B, C dhe D, përkatësisht.

Detyra 1. Vargu $(a_n)_{n\in N}$ është dhënë në mënyrë rekurzive me $a_1 = 1$,

$$a_n = a_1 \ldots a_{n-1} + 1, \quad \text{për } n \geq 2.$$

Caktoni numrin më të vogël real M të tillë që

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M, \text{ për çdo } m \in N.$$

Zgjidhje. Në qoftë se relacionin $a_n = a_1 \ldots a_{n-1} + 1$ e pjestojmë me $a_1 \ldots a_n$, do të fitojmë

$$\frac{1}{a_1 \ldots a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1 \ldots a_n},$$

të cilën mund ta shkruajmë ndryshe

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 \ldots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 \ldots a_n},$$

Në barazimin e fundit zëvendësojmë me radhë $n = 2, 3, \ldots, m$ (për cilindo $m \geq 2$) dhe i mbledhim të gjitha barazimet e fituara. Vërejmë se do të anulohen të gjithë termat përveç të parit dhe të fundit, kështu që do të marrim

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 \ldots a_n},$$

d.m.th.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_1 \ldots a_n} = 2 - \frac{1}{a_1 \ldots a_n},$$

prandaj

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < 2 \text{ për çdo } m \in N.$$

Tutje, duhet të vërtetojmë se $M = 2$, d.m.th. se 2 është numri më i vogël për të cilin $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M$ për çdo $m \in N$.

Nga përkufizimi i vargut vërejmë se $a_n \geq a_{n-1} + 1$, e pastaj me induksion vërejmë se $a_n \geq n$ për çdo $n \in N$. Për këtë arsye kemi

$$0 < \frac{1}{a_1 \ldots a_m} \leq \frac{1}{a_m} \leq \frac{1}{m},$$

për çdo $m \in N$, prej nga kemi $M = 2$.

Detyra 2. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve

$$\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x\, tgz = 2 \\ tgy\, tgz = 18. \end{cases} \tag{1}$$

Zgjidhje: Meqë $x + y + z = \pi$, kemi $tg(x + y) = tg(\pi - z)$, dmth. $\frac{tgx+tgy}{1-tgx\, tgy} = -tgz$. Duke e zëvendësuar këtë ekuacion në ekuacionin e parë të sistemit marrim:

$$\begin{cases} \frac{tgx+tgy}{1-tgx\, tgy} = -tgz \\ \operatorname{tg} x\, tgz = 2 \\ tgy\, tgz = 18. \end{cases} \tag{2}$$

Tutje, marrim zëvendësimet

$$\begin{cases} u = tgx \\ v = tgy \\ w = tgz \end{cases}$$

prej nga sistemi (2) merr formën:

$$\begin{cases} \frac{u+v}{1-uv} = -w \\ uw = 2 \\ vw = 18 \end{cases} \tag{3}$$

ose

$$\begin{cases} uvw = u + v + w \\ uw = 2 \\ vw = 18 \end{cases} \sim \begin{cases} v = u + w \\ uw = 2 \\ vw = 18 \end{cases} \sim \begin{cases} v = u + w \\ uw = 2 \\ (u + w)w = 18 \end{cases} \sim \begin{cases} v = u + w \\ uw = 2 \\ w^2 = 16 \end{cases}$$

Sistemi i fituar i ka këto zgjidhje:

$$\begin{cases} u_1 = 0.5 \\ v_1 = 4.5; \\ w_1 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = -0.5 \\ v_2 = -4.5 \\ w_2 = -4 \end{cases}$$

Duke u kthyer në variablat fillestare, kemi

$$\begin{cases} x_1 = arctg0.5 + k\pi \\ y_1 = arctg4.5 + n\pi; \\ z_1 = arctg4 + m\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -arctg0.5 + k\pi \\ y_2 = -arctg4.5 + n\pi. \\ z_2 = -arctg4 + m\pi \end{cases} \quad , \text{ k+m+n = 0}$$

ku $k, n, m \in \mathbb{Z}$.

Detyra 3. Le të jetë $a \geq 2$ numër natyralë i fiksuar, ndërsa me a_n le të shënojmë vargun

$a_n = a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$ (p.sh. $a_1 = a$, $a_2 = a^a$, $a_3 = a^{a^a}$, etj.). Tregoni se $(a_{n+1} - a_n)|(a_{n+2} - a_{n+1})$ për çdo numër natyralë n.

Zgjidhja. Tregojmë me induksion matematik që ky pohim vlen duke e përdorur disa herë teoremën e njohur $pmmp(a^m - 1, a^n - 1) = a^{pmmp(m,n)} - 1$ për çdo numër a, m, n dhe $a > 1$.

Së pari shohim se a_n mund ta paraqesim në formën $a_1 = a$ dhe $a_{n+1} = a^{a_n}$ për çdo numër natyralë *n*. Është e qartë se a_n është monotono-rritës, prandaj $a^{a_n} \mid a^{a_{n+1}}$ për çdo numër natyralë, dhe këtë do ta shfrytezojmë më vonë, ndërsa tani kthehemi te pohimi i detyrës duke e treguar me induksion.

Për $n = 1$ duhet treguar se $a^a - a \mid a^{a^a} - a^a$ ose $a\left(a^{a-1} - 1\right) \mid a^a\left(a^{a^a - a} - 1\right)$, prej nga është e qartë se $a \mid a^a$. Tregojmë tani se $a^{a-1} - 1 \mid a^{a^a - a} - 1$. Vërtet,

$$pmmp\left(a^{a-1} - 1, a - 1\right) = a^{pmmp(a-1,1)} - 1 = a - 1$$

prandaj $a - 1 \mid a^{a-1} - 1 \Rightarrow a - 1 \mid a(a^{a-1} - 1) = a^a - a$ nga kemi që

$$pmmp\left(a^{a^a - a} - 1, a^{a-1} - 1\right) = a^{pmmp(a^a - a, a-1)} - 1 = a^{a-1} - 1$$

prandaj $a^{a-1} - 1 \mid a^{a^a - a} - 1$, që duhej treguar.

Tani, supozojmë se vlen hipoteza për *n*, pra: $a_{n+1} - a_n \mid a_{n+2} - a_{n+1}$ dhe tregojmë që vlen për $n + 1$, pra që: $a_{n+2} - a_{n+1} \mid a_{n+3} - a_{n+2}$.

Me të vërtetë,
$a_{n+2} - a_{n+1} = a^{a_{n+1}} - a^{a_n} = a^{a_n}\left(a^{a_{n+1} - a_n} - 1\right)$ dhe $a_{n+3} - a_{n+2} = a^{a_{n+2}} - a^{a_{n+1}} = a^{a_{n+1}}\left(a^{a_{n+2} - a_{n+1}} - 1\right)$.
Është e qartë se $a^{a_n} \mid a^{a_{n+1}}$ dhe tregojmë që $a^{a_{n+1} - a_n} - 1 \mid a^{a_{n+2} - a_{n+1}} - 1$.
Duke përdorur hipotezën, kemi:

$$pmmp\left(a^{a_{n+2} - a_{n+1}} - 1, a^{a_{n+1} - a_n} - 1\right) = a^{pmmp(a_{n+2} - a_{n+1}, a_{n+1} - a_n)} - 1 = a^{a_{n+1} - a_n} - 1$$

prandaj $a^{a_{n+1} - a_n} - 1 \mid a^{a_{n+2} - a_{n+1}} - 1$, që duhej treguar.

Detyra 4. Të vërtetohet identiteti

$$\sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{2} \cdot 2^{n-1}.$$

Zgjidhja. Le të themi se nga n - persona duhet të caktojmë komisione k - anëtarëshe $(2 \le k \le n)$, ashtu që secili komision të ketë kryetarin dhe nënkryetarin.

Vërejmë se komisionet dy anëtarëshe mund t'i përzgjedhim në $\binom{n}{2}$ mënyra dhe secili prej tyre mund të jetë kryetar dhe nënkryetar. Pra, gjithsej kemi $2\cdot\binom{n}{2}$ mënyra komisione dy anëtarëshe.

Komisionet tre anëtarëshe mund t'i përzgjedhim në $\binom{n}{3}$ mënyra dhe pastaj përzgjedhja e kryetarit dhe nënkryetarit mund të bëhet në $3\cdot 2$ mënyra. D.m.th. kemi $3\cdot 2\cdot\binom{n}{3}$ komisione tre anëtarëshe.

Duke vazhduar në këtë mënyrë kemi $n\cdot(n-1\cdot\binom{n}{n}$ komisione $n-$ anëtarëshe.

Pra, gjithsej kemi $2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot 2\cdot\binom{n}{3}+\ldots+n\cdot(n-1)\cdot\binom{n}{n}$ komisione që plotësojnë kushtet e detyrës, e që paraqet anën e majtë të identitetit.

Le të numërojmë tani komisionet në një mënyrë tjetër.

Së pari caktojmë dy persona që mund të jenë kryetari dhe nënkryetari. Këtë mund ta bëjmë në $\binom{n}{2}$ mënyra. Pastaj, secili prej tyre mund të jetë kryetar (e tjetri nënkryetar). D.m.th kemi $2\cdot\binom{n}{2}$ mënyra. Në anën tjetër kemi $n-2$ persona prej të cilëve formojmë 2^{n-2} komisione.

Prandaj, gjithsej kemi $2\cdot\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}=\binom{n}{2}\cdot 2^{n-1}$, që paraqet anën e djathtë të relacionit.

Detyra 5. Drejtëzat e përcaktuara nga brinjët AB dhe CD të katërkëndëshit konveks $ABCD$ priten në pikën P. Vërtetoni se $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $PA\cdot PB=PC\cdot PD$, ku $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ janë masat e këndeve të brendshme te kulmet A, B, C dhe D, përkatësisht.

Zgjidhje. Vërejmë se

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ, \tag{1}$$

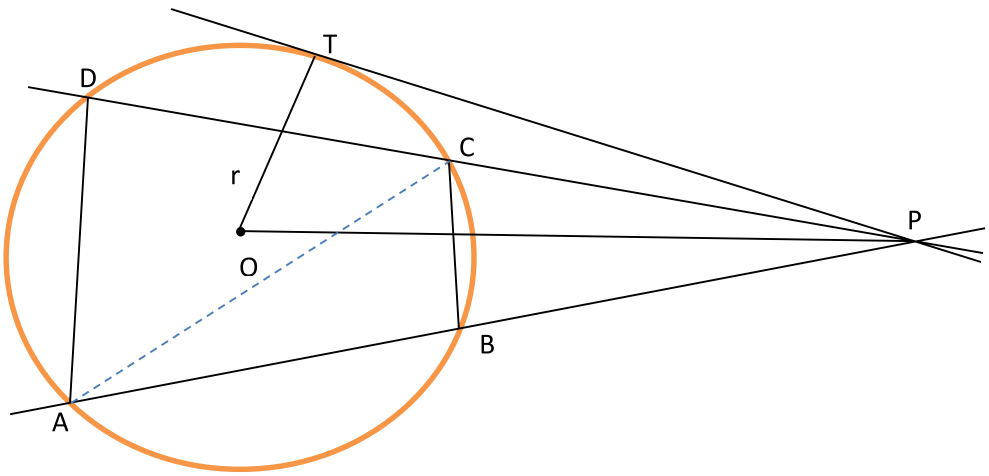
që paraqet kushtin e nevojshëm dhe të mjaftueshëm që katërkëndëshi konveks $ABCD$ të jetë tetivial (kulmet i takojnë një rrethi). Tani mbetet të tregojmë se katërkëndëshi $ABCD$ është tetivial atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD. \qquad (2)$$

Kushti i nevojshëm : Supozojmë se katërkëndëshi $ABCD$ është tetivial. Atëherë $PA \cdot PB$ dhe $PC \cdot PD$ paraqesin potencën e pikës P ndaj rrethit $l(O,r)$. Kështu:

$$PA \cdot PB = PT^2 = PO^2 - r^2 = PC \cdot PD,$$

që do të thotë se vlen barazimi (2) (shih fig.).



Kushti i mjaftueshëm: Supozojmë se vlen barazimi (2). Tregojmë se $ABCD$ është tetivial. Le të jetë $l(O,r)$ p.sh. rrethi i jashtashkruar rreth trekëndëshit ABC. Tregojmë se edhe kulmi D i takon rrethit $l(O,r)$. Le të jetë D' pikëprerja e drejtëzës CD me rrethin $l(O,r)$. Tregojmë se $D \equiv D'$. Potenca e pikës P ndaj rrethit $l(O,r)$ është e barabartë me $PA \cdot PB = PC \cdot PD'$. Nga ana tjetër, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, prandaj $PC \cdot PD = PC \cdot PD'$. Meqenëse vlejnë renditjet $(P - C - D)$ dhe $(P - C - D')$, kemi $D \equiv D'$. D.m.th., katërkëndëshi $ABCD$ është tetivial.