Kodi: ___________________

OMK 2017 - KLASA E 11-TË

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

25 shkurt 2017

Detyra 1. Të gjenden të gjitha dyshet e numrave natyralë (a, b) ashtu që $1 < a, b \leq 100$ dhe

$\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10}$ të jetë numër natyralë.

Detyra 2. Tregoni se për çdo tre numra realë pozitivë a , b, c , ka vend jobarazimi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}}\right).$$

Pastaj, tregoni se për cilat vlera të a , b, c , arrihet barazimi ?

Detyra 3. Në një turnir kanë marrë pjesë *n* ekipe të basketbollit. Secili ekip ka luajtur me secilin ekip tjetër saktësisht një lojë. Rezultate barazimi nuk ka pasur. Në qoftë se në fund të turnirit ekipi I i-të ka x_i fitore dhe y_i humbje ($i = 1, 2, \dots, n$), vërtetoni se:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Detyra 4. Të vërtetohet barazimi

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}.$$

Detyra 5. Sfera me rreze R është ndërprerë me dy rrafshe paralele ashtu që qendra e sferës të jetë jashtë shtresës së përcaktuar nga këto rrafshe. Le të jenë S_1 dhe S_2 syprinat e sipërfaqeve të prerjeve, ndërsa d largesa ndërmjet rrafsheve të dhënë. Gjeni syprinën e sipërfaqes së prerjes së sferës me rrafshin i cili është paralel me rrafshet e dhënë dhe njësoj i larguar nga ata.

Detyra 1. Të gjenden të gjitha dyshet e numrave natyralë (a, b) ashtu që $1 < a, b \leq 100$ dhe

$\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10}$ të jetë numër natyralë.

Zgjidhje. Në bazë të vetive të logaritmeve kemi

$$\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10} = \text{loga} + \text{logb} = \log \text{ab}$$

Kështu që numri $\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10}$ është numër natyralë atëherë dhe vetëm atëherë nëse ab është fuqi e numrit 10. Meqë $1 < a, b \leq 10^2$, rrjedhë se $ab\, \epsilon \{10, 10^2, 10^3, 10^4\}$. I shkruajmë të gjitha dyshet $(a, \ b)$ të tilla që $ab = 10^n$, për n=1, 2, 3, 4.

Në qoftë se $n = 1$, atëherë do të kemi dyshe të tilla $(2, \ 5)$ dhe $(5, \ 2)$.

Në qoftë se $n = 2$, atëherë do të kemi shtatë dyshe

$(2, 50), (4, 25), (5, 20), (10, 10), (20, 5), (25, 4), (50, 2)$.

Në qoftë se $n = 3$, atëherë do të kemi gjashtë dyshe

$(10, 100), (20, 50), (25, 40), (40, 25), (50, 20), (100, 10)$.

Në fund, në qoftë se $n = 4$, atëherë do të kemi vetëm një dyshe $(100, 100)$.

Detyra 2. Tregoni se për çdo tre numra realë pozitivë a, b, c, ka vend jobarazimi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}}\right).$$

Pastaj, tregoni se për cilat vlera të a, b, c, arrihet barazimi ?

Zgjidhje. Do të përdorim jobarazimin $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ për çdo dy numra realë pozitiv x, y, ndërsa me barazim atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = y$. Atëherë, kemi:

$$\frac{a}{b} + \frac{2b}{c} + 1 = \frac{a+b}{b} + \frac{2b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{b} \cdot \frac{2b}{c}} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{c}}$$

Në mënyrë të ngjashme kemi:

$\frac{b}{c} + \frac{2c}{a} + 1 \geq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a}}$ dhe $\frac{c}{a} + \frac{2a}{b} + 1 \geq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b}}$.

Duke I mbledhur këto tri jobarazimet e fundit, fitojmë:

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\right)\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right)$$

ndërsa duke pjestuar me 3 në të dy anët, fitojmë:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right)$$

që duhej treguar.

Barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur $\frac{a+b}{b}=\frac{2b}{c}$, pastaj $\frac{b+c}{c}=\frac{2c}{a}$, si dhe $\frac{c+a}{a}=\frac{2a}{b}$, ose ekuivalente me $c(a+b)=2b^2$, $a(b+c)=2c^2$ dhe $b(c+a)=2a^2$, përkatësisht.

Duke i mbledhur tri barazimet e fundit, fitojmë: $2(ab+bc+ca)=2(a^2+b^2+c^2)$ që është ekuivalente me $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ që është e mundur vetëm kur $a=b=c$. Prandaj, barazimi i kërkuar në detyrë arrihet vetëm kur $a=b=c$.

Detyra 3. Në një turnir kanë marrë pjesë *n* ekipe të basketbollit. Secili ekip ka luajtur me secilin ekip tjetër saktësisht një lojë. Rezultate barazimi nuk ka pasur. Në qoftë se në fund të turnirit ekipi I i-të ka x_i fitore dhe y_i humbje ($i = 1, 2, \ldots, n$), vërtetoni se:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Zgjidhje. Vërejmë se $x_i + y_i = n - 1$, ($i = 1, 2, \ldots, n$), sepse secili ekip ka luajtur $n - 1$ lojë, prandaj kemi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

sepse, numri i tërësishëm i fitoreve është i barabartë me numrin e tërësishëm të humbjeve dhe me numrin e të gjitha ndeshjeve të zhvilluara. Prej këtu kemi:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left((n-1)-y_i\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(n-1)^2 - 2(n-1)\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\\ &= n(n-1)^2 - 2(n-1)\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\end{aligned}$$

$$= n(n-1)^2 - n(n-1)^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Detyra 4. Të vërtetohet barazimi

$$\cos 36^{\circ} - \sin 18^{\circ} = \tfrac{1}{2}\,.$$

Zgjidhje. Meqë

$$\sin 72^{\circ} = \sin(90^{\circ} - 18^{\circ}) = \cos 18^{\circ}$$

dhe

$$\sin 72^{\circ} = \sin\,(\,2 \cdot 36^{\circ}) = 2\sin 36^{\circ} \cos 36^{\circ},$$

përfundojmë se

$$\cos 18^{\circ} = 2\sin 36^{\circ} \cos 36^{\circ} \qquad (1)$$

Po ashtu:

$$\sin 36^{\circ} = 2\sin 18^{\circ} \cos 18^{\circ} \qquad (2)$$

Duke shumëzuar anë për anë barazimet (1) dhe (2) gjejmë se

$$\cos 18^{\circ} \sin 36^{\circ} = 4\sin 36^{\circ} \cos 36^{\circ} \sin 18^{\circ} \cos 18^{\circ}.$$

Pas pjesëtimit me $\cos 18^{\circ} \sin 36^{\circ}$, fitojmë

$$1 = 4\cos 36^{\circ} \sin 18^{\circ} = \sin(\,36^{\circ} + 18^{\circ}) - \sin(\,36^{\circ} - 18^{\circ}) =$$

$$\tfrac{1}{2} = 2\cos 36^{\circ} \sin 18^{\circ} = \sin(\,36^{\circ} + 18^{\circ}) - \sin(\,36^{\circ} - 18^{\circ}) =$$

$$= \sin 54^{\circ} - \sin 18^{\circ} = \cos 36^{\circ} - \sin 18^{\circ}.$$

Pra,

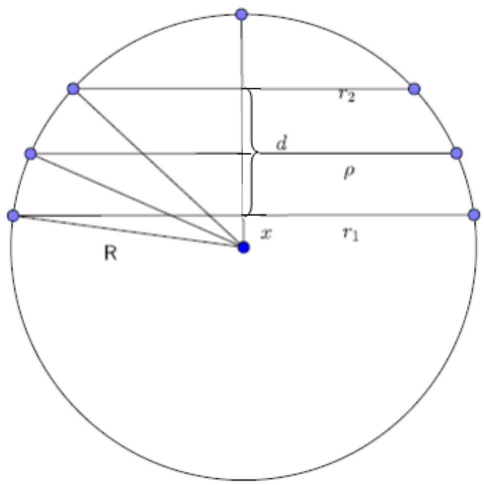
$$\cos 36^{\circ} - \sin 18^{\circ} = \tfrac{1}{2}\,.$$

çka duhej vërtetuar.

Detyra 5. Sfera me rreze R është ndërprerë me dy rrafshe paralele ashtu që qendra e sferës të jetë jashtë shtresës së përcaktuar nga këto rrafshe. Le të jenë S_1 dhe S_2 syprinat e sipërfaqeve të prerjeve, ndërsa d largesa ndërmjet rrafsheve të dhënë. Gjeni syprinën e sipërfaqes së prerjes së sferës me rrafshin i cili është paralel me rrafshet e dhënë dhe njësoj i larguar nga ata.

Zgjidhje:

$$\sqrt{R^2 - r_1^2} = x, \qquad (1)$$
$$\sqrt{R^2 - r_2^2} = x + d, \qquad (2)$$
$$\sqrt{R^2 - \rho^2} = x + \frac{d}{2}. \qquad (3)$$



(1) dhe (2) $\Longrightarrow \sqrt{R^2 - r_2^2} = d + \sqrt{R^2 - r_1^2}$,

(1) dhe (3) $\Longrightarrow \sqrt{R^2 - \rho^2} = \frac{d}{2} + \sqrt{R^2 - r_1^2}$,

Duke ngritur në katror, merret

$$R^2 - r_2^2 = d^2 + 2d\sqrt{R^2 - r_1^2} + R^2 - r_1^2, \quad /(-\frac{1}{2})$$

$$R^2 - \rho^2 = \frac{d^2}{4} + d\sqrt{R^2 - r_1^2} + R^2 - r_1^2,$$

ndërsa nga këtu, duke mbledhur, fitojmë

$$\frac{1}{2}r_2^2 - \rho^2 = -\frac{d^2}{4} - \frac{1}{2}r_1^2 \quad /\cdot \pi$$
$$S = \frac{1}{4}(2S_1 + 2S_2 + d^2\pi).$$