Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Kodi: ___________________

OMK 2017 - KLASA E 10-TË

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

25 shkurt 2017

Detyra 1. Le të jenë a dhe b numra realë pozitivë të tillë që $a^2 + b^2 = 8$ dhe $a^6 + b^6 = 416$. Të gjenden numrat a dhe b.

Detyra 2. Të zbërthehet në faktorë polinomi:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y).$$

Detyra 3. Le të jenë $a \neq 0,\ b \neq 0, c \neq 0$, tre numra realë që e plotësojnë kushtin $a + b + c = 0$. Tregoni se vlenë barazimi:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

Detyra 4. Le të jenë dhënë numrat realë pozitivë $a, b, c > 0$. Tregoni se mund të konstruktohet trekëndëshi me gjatësitë e brinjëve $a\,, b, c$, atëherë dhe vetëm atëherë nëse $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ për çfarëdo p, q të tillë që $p +\ q = 1$.

Detyra 5. Le të jetë $ABCD$ katërkëndësh këndrejtë me qendër O dhe le të jenë pikat P dhe Q në diagonalen AC të tilla që $|AP| = |PQ| = |QC|$. Në qoftë se drejtëza PB e pret brinjën AD në pikën M ndërsa drejtëza BQ e pret brinjën CD në pikën N, vërtetoni se syprinat e trekëndshave MPO dhe NQO janë të barabarta.

Detyra 1. Le të jenë a dhe b numra realë pozitivë të tillë që $a^2 + b^2 = 8$ dhe $a^6 + b^6 = 416$. Të gjenden numrat a dhe b.

Zgjidhje. Në bazë të formulës për kubin e binomit kemi:

$$(a^2 + b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2).$$

Duke zëvëndësuar të dhënat e detyrës në barazimin e mësipërm marrim:

$$8^3 = 416 + 3a^2b^2 \cdot 8.$$

Nga barazimi I më sipërm marrim $a^2b^2 = 4$.

Meqë a dhe b janë numra pozitivë kemi $ab > 0$, dhe për këtë arsye $ab = 2$.Tutje, njehsojmë $a + b$. Nga $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 12$, marrim sistemin prej dy ekuacioneve $ab = 2$ dhe $a + b = 2\sqrt{3}$, prej nga zgjidhjet e kërkuara janë $a_1 = \sqrt{3} - 1$ dhe $b_1 = \sqrt{3} + 1$, si dhe $a_2 = \sqrt{3} + 1$ dhe $b_2 = \sqrt{3} - 1$, prandaj $B(S) = \left\{ \left(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1 \right), \left(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1 \right) \right\}$.

Detyra 2. Të zbërthehet në faktorë polinomi:

$$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y). \qquad (1)$$

Zgjidhje. Vërejmë se $(y - z) + (z - x) + (x - y) = 0$, prandaj

$$(x - y) = -(y - z) + (z - x) \qquad (2)$$

Duke zëvëndësuar (2) në (1) kemi:

$$\begin{aligned}
x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = \\
&= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2[-(y - z) - (z - x)] \\
&= x^2(y - z) + y^2(z - x) - z^2(y - z) - z^2(z - x) \\
&= (y - z)(x^2 - z^2) + (z - x)(y^2 - z^2) \\
&= (y - z)(x - z)(x + z) - (x - z)(y - z)(y + z) \\
&= (x - z)(y - z)(x + z - y - z) \\
&= (x - z)(y - z)(x - y).
\end{aligned}$$

Detyra 3. Le të jenë $a \neq 0,\ b \neq 0, c \neq 0$, tre numra realë që e plotësojnë kushtin

$a + b + c = 0$. Tregoni se vlenë barazimi:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

Zgjidhje: Konsiderojmë prodhimin e shumëzuesit të parë dhe thyesën e parë të shumëzuesit të dytë dhe kemi:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b} = 1 + \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}$$

$$= 1 + \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab}\frac{c}{a-b} = 1 + \frac{c(a-b) - (a^2 - b^2)}{ab}\frac{c}{a-b}$$

$$= 1 + \frac{(a-b)(c-(a+b))}{ab}\frac{c}{a-b} == 1 + \frac{c}{ab}(c-(a+b))$$

Në bazë të supozimit kemi $a + b = -c$. Kështu që për produktin në fjalë fitojmë $1 + \frac{2c^2}{ab}$. Ngjashëm, llogarisim dy prodhimet tjera:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\frac{a}{b-c} = 1 + \frac{2a^2}{bc}$$

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\frac{b}{c-a} = 1 + \frac{2b^2}{ac}$$

Duke I mbledhur rezultatet e fituara kemi:

$$1 + \frac{2c^2}{ab} + 1 + \frac{2a^2}{bc} + 1 + \frac{2b^2}{ac} = 3 + 2\left(\frac{c^2}{ab} + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac}\right)$$

$$= 3 + 2\frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}$$

Tani në bazë të kushteve tëdetyrës $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, dhe përfundimisht marrim

$$3 + 2\frac{(a^3+b^3+c^3)}{abc} == 3 + 2\frac{3abc}{abc} = 9.$$

Detyra 4. Le të jenë dhënë numrat realë pozitivë $a, b, c > 0$. Tregoni se mund të konstruktohet trekëndëshi me gjatësitë e brinjëve $a\ , b, c\ ,$ atëherë dhe vetëm atëherë nëse $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ për çfarëdo p, q të tillë që $p +\ q = 1$.

Zgjidhje. Dijmë se a, b, c janë gjatësi të brinjëve të trekëndëshit atëherë dhe vetëm atëherë nëse është $a +\ b > c, a +\ c > b$, dhe $b +\ c > a$.

Le tëjetë

$$Q = pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 =$$
$$= c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2,$$

d.m.th. Q është funksion kuadratik në varësi të p dhe

$$Q > 0 \Leftrightarrow \Delta = [(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2] < 0$$

$$\Leftrightarrow [a^2 - b^2 - c^2 - 2bc][a^2 - b^2 - c^2 + 2bc] < 0$$

$$\Leftrightarrow [a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] < 0$$

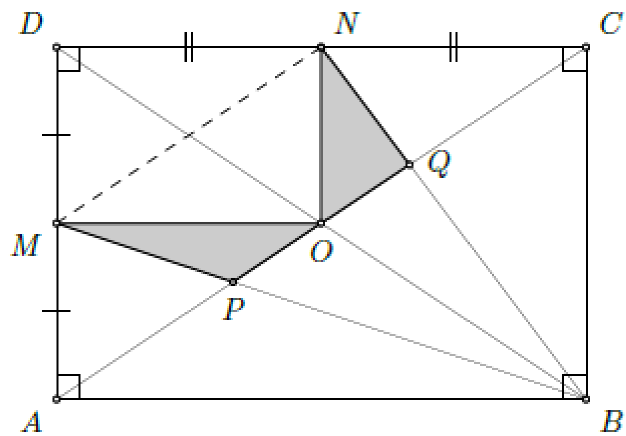
$$\Leftrightarrow [a+b+c][a-b-c][a-b+c][a+b-c] < 0$$

$$\Leftrightarrow [b+c-a][a-b+c][a+b-c] > 0.$$

Tani, $[b+c-a][a-b+c][a+b-c]$>0 në qoftë se të tre faktorët janë pozitivë ose njëri pozitivë dhe dy tjerët negativë. Por kjo e fundit është e pamundshme sepse sikur të kishim $[b+c-a] < 0$, $[a-b+c] < 0$, duke i mbledhur këto jobarazime do të kishim $c < 0$, dhe arrijmë në kontradiksion me supozimet e detyrës.

Detyra 5. Le të jetë $ABCD$ katërkëndësh këndrejtë me qendër O dhe le të jenë pikat P dhe Q në diagonalen AC të tilla që $|AP| = |PQ| = |QC|$. Në qoftë se drejtëza PB e pret brinjën AD në pikën M ndërsa drejtëza BQ e pret brinjën CD në pikën N, vërtetoni se syprinat e trekëndshave MPO dhe NQO janë të barabarta.

Zgjidhje.



Meqë $\measuredangle APM = \measuredangle CPB$ dhe $\measuredangle PAM = \measuredangle PCB$, trekëndshat MAP dhe BCP janë të ngjashëm. Nga ngjashmëria e tyre kemi

$$\frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{1}{2}.$$

Meqë $|AD| = |BC|$, vlen $|AM|:|AD|$=1:2, d.m.th. M e përgjysmon brinjën AD. Në mënyrë analoge për shkak të ngjashmërisë së trekëndshave $ABQ\ dhe\ CNQ$, kemi që N e përgjysmonë brinjën DC. Kështu, konstatojmë se MN është vija e mesme e trekëndshit ACD, dhe për këtë $MN \parallel AC$. Për këtë arsye lartësia h_1 nga kulmi N në brinjën OQ është e barabartë me lartësinë h_2 nga kulmi M në brinjën OP.

Pika O e përgjysmon diagonalen AC. Meqë $|AP| = |CQ|$, rrjedhë $|OP| = |OQ|$. Për këtë arsye

$$S_{MNO} = \frac{|OP| \cdot h_1}{2} = \frac{|OQ| \cdot h_2}{2} = S_{NQO}.$$