Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Kodi: ___________________

OMK 2017 - KLASA E 9-TË

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

25 shkurt 2017

Detyra 1. Të gjenden të gjithë numrat e thjeshtë të formës $n^3 - 1$ për numrin e plotë $n > 1$.

Detyra 2. Të zgjidhet inekuacioni $|x-1| - 2|x+4| > 3 + 2x$.

Detyra 3. Tre papagaj të verdhë për 4 ditë i hanë 36 gram fara. Pesë papagaj të kuq për tri ditë i hanë 60 gram fara. Sa ditë mund të ushqehen 2 papagaj të verdhë dhe 4 papagaj të kuq me 88 gram fara.

Detyra 4. Të caktohen të gjitha treshet e numrave natyralë tek të njëpasnjëshëm, të tilla që shuma e katrorëve të tyre është e barabartë me ndonjë numër katër shifrorë me të gjitha shifrat e barabarta.

Detyra 5. Brenda drejtkëndëshit $ABCD$ është dhënë pika T largesat e së cilës nga kulmet A, B, C janë më radhë $15, 24, 20$. Sa është largësia e pikës T nga kulmi D?

Detyra 1. Të gjenden të gjithë numrat e thjeshtë të formës $n^3 - 1$ për numrin e plotë $n > 1$.

Zgjidhje. Meqë

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1),$$

dhe meqë për çdo $n > 1$ të plotë $n^2 + n + 1 > 1$, që $n^3 - 1$ të jetë i thjeshtë duhet të jetë $n - 1 = 1$, d.m.th. $n = 2$. Për $n = 2$, $n^3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$. Pra i vetmi numër i thjeshtë i formës $n^3 - 1$ është numri 7.

Detyra 2. Të zgjidhet inekuacioni $|x-1| - 2|x+4| > 3 + 2x$.

Zgjidhje. Meqë shprehjet nën vlerën absolute anulohen për $x = 1$ dhe $x = -4$, tërë drejtëzën reale $R = (-\infty, +\infty)$ me pikat $x = -4$ dhe $x = 1$ e ndajmë në nënintervalet $(-\infty, -4)$, $[-4,1)$, $[1, +\infty)$ dhe në secilin prej tyre e zgjidhim inekuacionin e dhënë. Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë do të jetë unioni i bashkësive të zgjidhjeve të atij inekuacioni në secilin prej intervaleve të mësipërm.

1) Për çdo $x \in (-\infty, -4)$, d.m.th. për çdo $x < -4$ është $x + 4 < 0$ dhe $x - 1 < 0$, kështu që:
$|x-1| - 2|x+4| > 3 + 2x \iff -(x-1) - 2[-(x+4)] > 3 + 2x \iff$
$\iff -x + 1 + 2x + 8 > 3 + 2x \iff x < 6.$

Prandaj, çdo pikë e intervalit $(-\infty, -4) = B_1$ është zgjidhje e inekuacionit të dhënë.

2) Për çdo $x \in [-4,1)$, d.m.th. për çdo $-4 \leq x < 1$ vlen $x + 4 \geq 0$ dhe $x - 1 < 0$, kështu që:
$|x-1| - 2|x+4| > 3 + 2x \iff -(x-1) - 2(x+4) > 3 + 2x \iff$
$\iff -x + 1 - 2x - 8 > 3 + 2x \iff 5x < -10 \iff x < -2 \iff x \in (-\infty, -2).$

Prandaj, $[-4,1) \cap (-\infty, -2) = [-4, -2) = B_2$ është bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë në intervalin $[-4,1)$.

3) Për çdo $x \in [1, +\infty)$ d.m.th. për çdo $x \geq 1$ vlen $x + 4 > 0$ dhe $x - 1 \geq 0$, kështu që
$|x-1| - 2|x+4| > 3 + 2x \iff x - 1 - 2(x+4) > 3 + 2x \iff$
$\iff x - 1 - 2x - 8 > 3 + 2x \iff 3x < -12 \iff x < -4 \iff x \in (-\infty, -4).$

Meqë $[1, +\infty) \cap (-\infty, -4) = \emptyset = B_3$ përfundojmë që në intervalin $[1, +\infty)$ inekuacioni i dhënë nuk ka asnjë zgjidhje.

Përfundimisht, $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = (-\infty, -4) \cup [-4, -2) \cup \emptyset = (-\infty, -2)$ është bashkësia e të gjitha zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë. Me fjalë tjera, çdo numër real $x < -2$ është zgjidhje e inekuacionit të dhënë.

Detyra 3. Tre papagaj të verdhë për 4 ditë i hanë 36 gram fara. Pesë papagaj të kuq për tri ditë i hanë 60 gram fara. Sa ditë mund të ushqehen 2 papagaj të verdhë dhe 4 papagaj të kuq me 88 gram fara.

Zgjidhje. Një papagall i verdhë për 4 ditë i hanë 12 gram fara kurse për 1 ditë i hanë 3 gram. Një papagall i kuq për 3 ditë i hanë 12 gram fara, kurse për një ditë i hanë 4 gram. Për një ditë 2 papagaj të verdhë dhe 4 papagaj të kuq i hanë $2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22$ gram fara. D.m.th., me 88 gram mund të ushqehen 88:22=4 ditë.

Detyra 4. Të caktohen të gjitha treshet e numrave natyralë tek të njëpasnjëshëm, të tilla që shuma e katrorëve të tyre është e barabartë me ndonjë numër katër shifrorë me të gjitha shifrat e barabarta.

Zgjidhje. Kërkojmë numrin natyralë k dhe shifrën $x \in \{1,2,\ldots,9\}$ ashtu që të vlejë:

$$(2k-1)^2 + (2k+1)^2 + (2k+3)^2 = \overline{xxxx}$$

$$12k^2 + 12k + 11 = 1111 \cdot x$$

$$12(k^2 + k) + 11 = 12 \cdot 92x + 7x.$$

Nga barazimi i mësipërm kemi që $7x - 11$ plotëpjestohet me 12, prandaj x duhet të jetë tek.

Për $x \in \{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$, $7x - 11$ nuk plotëpjestohet me 12.

Për $x = 5$ kemi $7 \cdot 5 - 11 = 24 = 2 \cdot 12$, d.m.th.,

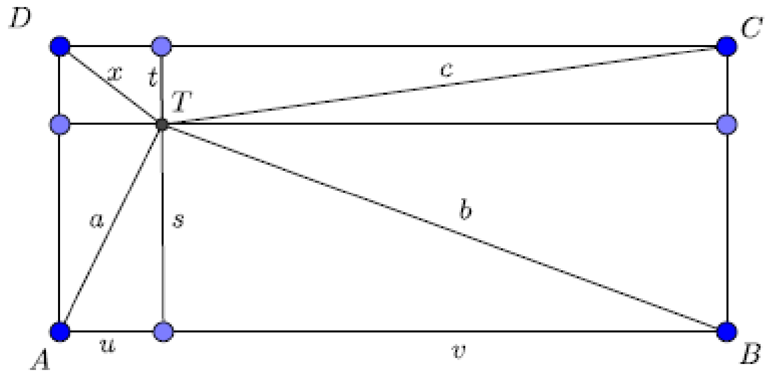
$$12k^2 + 12k + 11 = 5555 \ / \ :12$$

$$k^2 + k = k(k+1) = 462 = 21 \cdot 22.$$

Kështu përfundojmë që $k = 21$, kurse numrat e kërkuar janë 41, 43, dhe 45.

Detyra 5. Brenda drejtkëndëshit $ABCD$ është dhënë pika T largesat e së cilës nga kulmet A, B, C janë me radhë $15, 24, 20$. Sa është largësia e pikës T nga kulmi D?

Zgjidhje:



Le të jetë x largesa e kërkuar. Kemi me radhë

$$a^2 = u^2 + s^2,$$

$$b^2 = v^2 + s^2,$$

$$c^2 = v^2 + t^2,$$

$$x^2 = u^2 + t^2.$$

Nga këtu kemi: $a^2 + c^2 = b^2 + x^2$, d.m.th $x^2 = a^2 - b^2 + c^2$.

Në rastin tonë kemi $x^2 = 225 - 576 + 400 = 49$ d.m.th. $x = 7$.