Kodi: ____________________

OMK 2018 - KLASA E 12-TË

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

27 Janar 2018

Detyra 1. Gjeni të gjitha funksionet $f : R \to R$ ashtu që të vlejë:

$$f(x+y)+yf(x)\le x+f(y)+f(xy),$$

për çdo $x, y \in R$.

Detyra 2. Është dhënë katërkëndëshi konveks $ABCD$ te i cili $AB \nparallel CD$, diagonalet e të cilit priten në pikën O. Drejtëza m nëpër pikën O paralele me brinjën AB e pret brinjën AD në pikën P, kurse brinjën BC në pikën Q. Drejtëza n nëpër pikën O paralele me brinjën CD e pret brinjën BC në pikën T, kurse brinjën AD në pikën U. Tregoni se nëse $PO \cdot OQ = TO \cdot OU$, atëherë katërkëndëshi $ABCD$ është tetivial (ciklik).

Detyra 3. Vërtetoni se:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}=\binom{2n}{n-1}$$

Detyra 4. 2018 nxënës të mërzitur kalojnë nëpër korridor ku gjenden 2018 klasë me dyer të mbyllura të numëruara nga 1 deri në 2018. Nxënësi i parë i hap të gjitha dyert; nxënësi i dytë i mbyll të gjitha dyert me numër: 2, 4, 6, ..., 2018; nxënësi i tretë vepron në dyert me numër 3, 6, 9, ..., 2016 edhe atë nëse dera është e mbyllur, ai e hap atë, kurse nëse dera është e hapur, ai e mbyll atë dhe kështu me radhë. Nxënësi i *i*-të, vepron në dyert me numër shumfisha të *i*-së: nëse dera është e mbyllur, ai e hap atë, kurse nëse dera është e hapur, ai e mbyll atë. Sa është shuma e numrave të dyerve që mbesin të mbyllura pasi çdo nxënës të përfundojë ecjen nëpër korridor?

Detyra 5. Le të jetë n numër natyror i tillë që $n+1$ nuk plotpjesëtohet me 2 dhe 5. Vërtetoni se ekziston numri natyror i cili mbaron me $n_1n_2\dots n_k$ ($n=\overline{n_1n_2\dots n_k}$) dhe plotpjesëtohet me $n+1$.

Zgjidhjet

Detyra 1. Gjeni të gjitha funksionet $f : R \to R$ ashtu që të vlejë:

$$f(x+y)+yf(x) \le x+f(y)+f(xy),$$

për çdo $x, y \in R$.

Zgjidhja. Marrim $x = 0$ në (1) kemi që

$$f(y) + yf(0) \le f(y) + f(0) \Rightarrow (y-1)f(0) \le 0$$

për cdo $y \in \mathbb{R}$, prandaj kemi që $f(0) = 0$. Marrim $y = 0$ në (1) kemi që

$$f(x) \le x + f(0) + f(0) = x \Rightarrow$$

$$f(x) \le x \qquad (2)$$

Marrim $x = 1 \wedge y = -1$ në (1) si dhe duke shfrytëzuar (2) kemi që

$$-1 \le -f(1) = f(0) - f(1) \le 1 + f(-1) + f(-1) \le 1 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow$$

$$f(1) = 1 \wedge f(-1) = -1$$

Marrim $x = -1 \vee y \to x + 1$ në (1) si dhe duke përdorur (2) kemi që

$$f(x) + (x+1)f(-1) \le 1 + f(x+1) + f(-x-1) \Rightarrow$$

$$f(x) - x - 1 \le -1 + f(x+1) - x - 1 = f(x+1) - x - 2 \Rightarrow f(x) + 1 \le f(x+1)$$

Marrim $x = 1$ dhe $y \to x$ në (1) si dhe duke shfrytëzuar relacionin e fundit dhe (2) kemi që

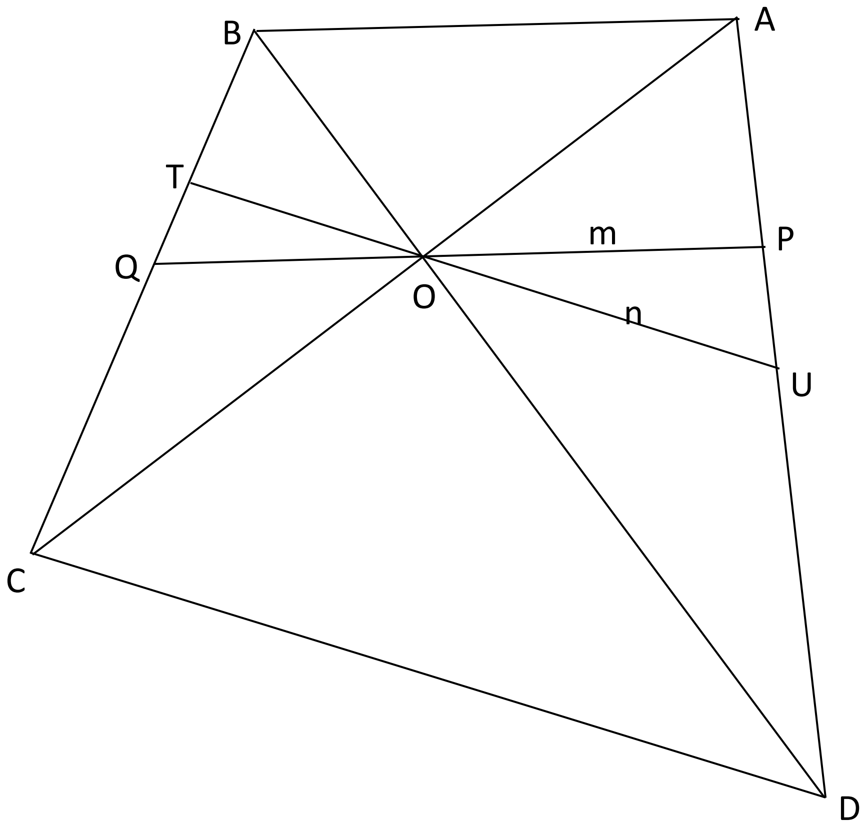
$$f(x) + 1 + x \le f(x+1) + xf(1) \le 1 + f(x) + f(x) \Rightarrow x \le f(x)$$

Nga relacioni i fundit dhe relacioni (2) kemi që $f(x) = x$ për cdo $x \in \mathbb{R}$. Duke zëvedësuar në (1) lehtë mund të konkludojmë që kjo është zgjidhja e vetme.

Detyra 2. Është dhënë katërkëndëshi konveks $ABCD$ te i cili $AB \nparallel CD$, diagonalet e të cilit priten në pikën O. Drejtëza m nëpër pikën O paralele me brinjën AB e pret brinjën AD në pikën P, kurse brinjën BC në pikën Q. Drejtëza n nëpër pikën O paralele me brinjën CD e pret brinjën BC në pikën T, kurse brinjën AD në pikën U. Tregoni se nëse $PO \cdot OQ = TO \cdot OU$, atëherë katërkëndëshi $ABCD$ është tetivial (ciklik).

Zgjidhja. Do të tregojmë se $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180^\circ$. Nga barazimi $PO \cdot OQ = TO \cdot OU$ rrjedh se pikat P, T, Q dhe U i takojnë një rrethi (barazimi i mësimpërm paraqetin kushtin e nevojshëm dhe të mjaftueshëm që pikat P, Q, T dhe U t'i takojnë një rrethi (shih potencën e pikës ndaj rrethit)). Kështu katërkëndëshi $PTQU$ është tetivial, prandaj $\measuredangle PQT = \measuredangle PUT$ si kënde periferike mbi tetivën e njëjtë PT. Nga ana tjetër, $\measuredangle PQT + \measuredangle ABC = 180^\circ$, sepse PQ është paralele me AB. Ngjashëm, $\measuredangle PUT = \measuredangle ADC$, prandaj

$\measuredangle PQT = \measuredangle ADC$. Tani, nga $\measuredangle PQT + \measuredangle ABC = 180^{\circ}$ rrjedh se $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180^{\circ}$, që d.m.th. se katërkëndëshi $ABCD$ është tetivial.



Detyra 3. Vërtetoni se:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}=\binom{2n}{n-1}.$$

Zgjidhja. Nisemi nga identiteti:

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+\cdots+(1+x)^{2n-1}=(1+x)^n\left[1+(1+x)+\cdots+(1+x)^{n-1}\right]=$$

$$=(1+x)^n\cdot\frac{(1+x)^n-1}{1+x-1}=\frac{(1+x)^n\left[(1+x)^n-1\right]}{x}$$

Koeficienti në anën e majtë pranë x^n është:

$$M=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\cdots+\binom{2n-1}{n} \qquad (1)$$

Shprehja në anën e djathtë të identitetit është:

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]\cdot\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}x+\binom{n}{3}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^{n-1}\right]$$

Koeficienti në shprehjen e fundit pranë x^n është:

$$D=\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{1}+\binom{n}{n-1}\cdot\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{n}=\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{0}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{n-1} \qquad (2)$$

Rrjedhimisht, $M=D$.

Shfrytëzojmë barazimin $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, kemi:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}^2=\binom{2n+2}{n+1}$$

$$2+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}^2=\binom{2n+2}{n+1}$$

$$2+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]^2=\binom{2n+2}{n+1}$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}^2+1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\cdot\binom{n}{k}=\binom{2n+2}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\cdot\binom{n}{k}=\binom{2n+2}{n+1}$$

prej nga

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\cdot\binom{n}{k}=\frac{1}{2}\left[\binom{2n+2}{n+1}-\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{(2n+2)!}{\left[(n+1)!\right]^2}-2\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]=$$

(3) $$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}-2\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\left(2\cdot\frac{2n+1}{n+1}-2\right)=$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!\cdot n\cdot n!}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\binom{2n}{n-1}$$

Nga relacioni (3) rrjedh se $D=\binom{2n}{n-1}$, dhe meqë $M=D$, kemi ardhur deri te vërtetimi i duhur.

Detyra 4. 2018 nxënës të mërzitur kalojnë nëpër korridor ku gjenden 2018 klasë me dyer të mbyllura të numëruara nga 1 der në 2018. Nxënësi i parë i hap të gjitha dyert;

nxënësi i dytë i mbyll të gjitha dyert me numër: 2, 4, 6, ..., 2018; nxënësi i tretë vepron në dyert me numër 3, 6, 9, ..., 2016 edhe atë nëse dera është e mbyllur, ai e hap atë, kurse nëse dera është e hapur, ai e mbyll atë dhe kështu me radhë. Nxënësi i i-të, vepron në dyert me numër shumfisha të i-së: nëse dera dera është e mbyllur, ai e hap atë, kurse nëse dera është e hapur, ai e mbyll atë. Sa është shuma e numrave të dyerve që mbesin të mbyllura pasi çdo nxënës të përfundojnë ecjen nëpër korridor?

Zgjidhja. Vërejmë se në derën e i-të do të veprojë nxënësi j atëherë dhe vetëm atëherë nëse $j \mid i \ (i = jk)$. Kjo mund të ndodh nëse në derë do të veprojë edhe nxënësi $\frac{i}{j}\left(j \mid i\, , i \neq 0 \Rightarrow \frac{i}{j} \mid i \right)$. Pra për një numër të plotë të ndryshëm nga zero, ekziston numër çift i pjesëtuesve të tij, përveç nëse është katror i plotë (nëse $n = m^2$, atëherë $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ dhe secila fuqi duhet të jetë çift). Pra numri i pjesëtueve të n është $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1) -$ tek). Përfundimisht, vetëm dyert me numër $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2,\ 25 = 5^2, \dots, 1936 = 44^2$ mbesin të hapura dhe dyert me numra tjerë mbesin të mbyllura.

Të hapura mbeten $S = 1^2, +2^2 + \dots + 44^2 = \dfrac{44 \cdot (44+1) \cdot (2 \cdot 44 + 1)}{6} = 29370$.

Prandaj kemi:

$$S_m - S = \sum_{i=1}^{2018} i - S = \frac{2018 \cdot 2019}{2} - 29370 = 2\,007\,801 .$$

Detyra 5. Le të jetë n numër natyror i tillë që $n+1$ nuk plotpjesëtohet me 2 dhe 5. Vërtetoni se ekziston numri natyror i cili mbaron me $n_1 n_2 \dots n_k$ $(n = \overline{n_1 n_2 \dots n_k})$ dhe plotpjesëtohet me $n+1$.

Zgjidhja. Mbetjet gjatë pjesëtimit me $n+1$ janë: $0, 1, 2, \dots, n$. Shënojmë numrin $n = \overline{n_1 n_2 \dots n_k}$. Le t'i marrim n numra si në vijim:

$D_1 = n_1 n_2 \dots n_k$

$D_2 = n_1 n_2 \dots n_k\, n_1 n_2 \dots n_k$

$D_3 = n_1 n_2 \dots n_k\, n_1 n_2 \dots n_k\, n_1 n_2 \dots n_k$

.

.

.

$D_n = \underbrace{n_1 n_2 \dots n_k\, n_1 n_2 \dots n_k \dots n_1 n_2 \dots n_k}_{n-herë}$

Në qoftë se ndonjë nga numrat $D_1, D_2, \ldots, D_n$ plotpjesëtohet me $n+1$, atëherë vërtetimi i detyrës mbaron. Supozojmë se asnjë nga numrat $D_1, D_2, \ldots, D_n$ nuk plotpjesëtohet me $n+1$. Atëherë, nga Parimi Dirichlet ekzistojnë të paktën dy numra nga numrat $D_1, D_2, \ldots, D_n$ që kanë mbetje të njëjtë gjatë pjesëtimin me $n+1$. Le të jenë D_i dhe D_j numrat që kanë mbetje të njëjtë gjatë pjesëtimin me $n+1$. Atëherë,

$D_i - D_j \equiv 0(mod\, n+1)$, rrjedhimisht $\underbrace{n_1n_2 \ldots n_k\, n_1n_2 \ldots n_k \ldots n_1n_2 \ldots n_k}_{(i-j)-\text{herë}}\underbrace{000 \ldots 000}_{j-\text{herë}} \equiv 0(mod\, n+1)$. Meqë $n+1$ nuk plotpjesëtohet me 2 dhe 5, atëherë numri $\underbrace{n_1n_2 \ldots n_k\, n_1n_2 \ldots n_k \ldots n_1n_2 \ldots n_k}_{(i-j)-\text{herë}}$ plotpjesëtohet me $n+1$.