Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Kodi: ____________________

OMK 2018 - KLASA E 11-TË

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

27 Janar 2018

Detyra 1. Gjeni të gjitha funksionet $f: R \to R$ ashtu që të vlejë:

$$f(x)f(x+y) = xf(y) + f(x^2)$$

për çdo $x, y \in R.$

Detyra 2. Le të jetë $ABCDE$ pesëkëndësh konveks i tillë që $AB = BC = CD, \angle EAB = \angle BCD$ dhe $\angle EDC = \angle CBA$. Tregoni se normalja nga pika E e lëshuar në BC dhe segmentet AC dhe BD priten në të njëjtën pikë.

Detyra 3. Në sa mënyra të ndryshme mund të përzgjedhim 101 numra natyrorë nga bashkësia $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$ ashtu që të gjithë numrat e përzgjedhur të formojnë varg rritës aritmetik me diferencë $d \geq 10, d \in \mathbb{N}$?

Detyra 4. Caktoni të gjithë numrat e thjeshtë p dhe q, ashtu që të vlejë $p^2 + 2^p = q$.

Detyra 5. Le të jenë a, b, c numra realë pozitivë të tillë që $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Tregoni se:

$$(a^2 - 3a + 3)\,(b^2 - 3b + 3)\,(c^2 - 3c + 3) \geq 27.$$

Zgjidhjet

Detyra 1. Gjeni të gjitha funksionet $f : R \to R$ ashtu që të vlejë:

$$f(x)f(x+y) = xf(y) + f(x^2),$$

për çdo $x, y \in R$.

Zgjidhja. Marrim $x = 0$ në (1) kemi që $f(0)f(y) = f(0) \Rightarrow f(0)(f(y) - 1) = 0$.

Nëse $f(0) \neq 0$ atëherë $f(y) = 1$ për cdo $y \in \mathbb{R}$ duke e zëvendësuar në (1) vërehet lehtë se kjo nuk mund të jetë zgjidhje prandaj mbetet që $f(0) = 0$.

Marrim $y = 0$ në (1) kemi që $f(x)^2 = f(x^2)$. Marrim $x = 1$ në ekuacionin e fundit kemi që

$$f(1)^2 = f(1) \Rightarrow f(1)(f(1) - 1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \ \vee f(1) = 1$$

Rasti 1. $f(1) = 0$

Marrim $x = 1$ në (1) kemi që $f(1)f(1+y) = f(y) + f(1) \Rightarrow f(y) = 0$ për cdo $y \in \mathbb{R}$. Duke zëvendësuar në (1) lehtë mund të konkludojmë që kjo është një zgjidhje e ekuacionit.

Rasti 2. $f(1) = 1$

Marrim $x = 1$ dhe $y \to x$ në (1) kemi që $f(1)f(1+x) = f(x) + f(1) \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1$

Marrim $y = 1$ në (1) si dhe duke shfrytëzuar relacionin e fundit kemi që

$$f(x)f(x+1) = xf(1) + f(x^2) \Rightarrow f(x)(f(x)+1) = x + f(x)^2 \Rightarrow f(x)^2 + f(x) = x + f(x)^2$$

$\Rightarrow f(x) = x$ për cdo $x \in \mathbb{R}$. Duke zëvendësuar në (1) lehtë mund të konkludojmë që kjo është një zgjidhje tjetër. Prandaj të gjitha zgjidhjet e ekuacionit janë

$$f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \vee f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Detyra 2. Le të jetë $ABCDE$ pesëkëndësh konveks i tillë që $AB = BC = CD, \angle EAB = \angle BCD$ dhe $\angle EDC = \angle CBA$. Tregoni se normalja nga pika E e lëshuar në BC dhe segmentet AC dhe BD priten në të njëjtën pikë.

Zgjidhja. Gjatë zgjidhjes së detyrës, $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ dhe $\angle A$ do të shënojmë këndet e brendshme të pesëkëndëshit $ABCDE$. Normalet në AC dhe BD që kalojnë nga pikat B dhe C përkatësisht le të priten në pikën I. Atëherë $BD \perp CI$ dhe ngjashëm $AC \perp BI$. Prandaj AC dhe BD takohen në ortoqendrën H të trekëndëshit BIC dhe $IH \perp BC$.

Mbetet të tregojmë që pika E shtrihet në drejtëzën IH, ose në mënyrë ekuivalente, $EI \perp BC$.

Drejtëzat IB dhe IC janë simetrale të këndeve $\angle B$ dhe $\angle C$ përkatësisht. Meqë $IA = IC, IB = ID$ dhe $AB = BC = CD$, trekëndëshat IAB, ICB dhe ICD janë kongruentë.

Prandaj $\angle IAB = \angle ICB = \angle \dfrac{C}{2} = \angle \dfrac{A}{2}$, pra drejtëza IA është simetrale e $\angle A$. Ngjashëm drejtëza ID është simetrale e $\angle D$. Përfundimisht drejtëza IE është simetrale e $\angle E$ sepse pika I gjendet në të gjitha katër simetrale e këndeve të brendshme të pesëkëndëshit.

Shuma e këndëve të brendshme në pesëkëndësh është 540°, prandaj

$$\angle E = 540^\circ - 2\angle A + 2\angle B.$$

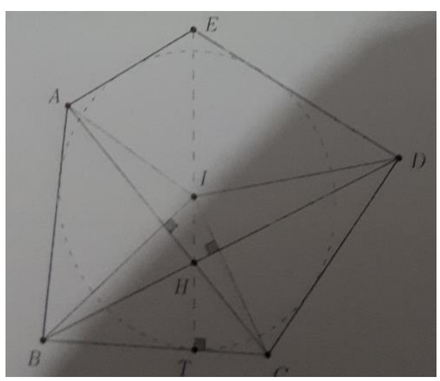
Në katërkëndëshin $ABIE$,

$$\angle BIE = 360^\circ - \angle EAB - \angle ABI - \angle AEI = 360^\circ - \angle A - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle E$$

$$= 360^\circ - \angle A - \frac{1}{2}\angle B - (270^\circ - \angle A - \angle B)$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ + \angle IBC$$

që nënkupton që $EI \perp BC$, gjë që kompleton vërtetimin.



Detyra 3. Në sa mënyra të ndryshme mund të përzgjedhim 101 numra natyrorë nga bashkësia $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$ ashtu që të gjithë numrat e përzgjedhur të formojnë varg rritës aritmetik me diferencë $d \geq 10, d \in \mathbb{N}$?

Zgjidhja. Le të shqyrtojmë numrat $a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots, a_1+100d$ $(a_1 \in \square, d \in \square, d \geq 10)$. Atëherë kemi $a_1+100d \leq 2018 \Rightarrow d \leq \dfrac{2018-a_1}{100}$. Meqë $a_1 \geq 1 \Rightarrow d \leq \dfrac{2017}{100} = 20.17$. Prandaj $10 \leq d \leq 20$. Qartë se për çdo $a_1 = 2018-100d$ merret një varg që plotëson kushtet e detyrës. Prandaj kemi $\sum\limits_{d=10}^{20}(2018-100d) = 5698$ mënyra të ndryshme.

Detyra 4. Caktoni të gjithë numrat e thjeshtë p dhe q, ashtu që të vlej $p^2+2^p=q.$

Zgjidhja. Është e qartë se $p \neq 2,$ sepse po të ishte $p=2,$ atëherë do të ishte q numër çift më i madh se 2, që është në kundërshtim me faktin se q është numër i thjeshtë.

Nëse $p=3,$ atëherë $q=3^2+2^3=17.$

Nëse $p>3,$ atëherë $p^2+2^p=(p^2-1)+(2^p+1)=q.$ Meqenëse

$3 \mid p^2-1=(p-1)(p+1)$ (sepse $p \equiv 1$ ose $2 (\mathrm{mod}\, 3)$) dhe

$3 \mid (2^p+1)=(2+1)(2^{p-1}-2^{p-2}+\ldots-2+1),$

atëherë edhe $3 \mid q,$ prej nga rrjedh se q është nuk është numër i thjeshtë. Përfundimisht zgjidhja e vetme është $p=3$ dhe $q=17.$

Detyra 5. Le të jenë a, b, c numra realë pozitivë të tillë që $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Tregon se: $(a^2-3a+3)\,(b^2-3b+3)\,(c^2-3c+3) \geq 27.$

Zgjidhja. Shumëzojmë dy anët me abc kemi që mosbarazimi është ekuivalent me

$$(a^3-3a^2+3a)(b^3-3b^2+3b)(c^3-3c^2+3c) \geq 27abc \Leftrightarrow$$

$$((a-1)^3+1)((b-1)^3+1)((c-1)^3+1) \geq 27abc$$

Nga kushti kemi që $\frac{1}{a}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Rightarrow a>1$ ngjashëm kemi $b>1$ dhe $c>1$.

Prandaj nga mosbarazimi I Holderit kemi që

$$((a-1)^3+1)((b-1)^3+1)((c-1)^3+1) \geq \left((a-1)(b-1)(c-1)+1\right)^3 =$$

$$=(abc-ab-bc-ca+a+b+c)^3$$

Prandaj mjafton të tregohet që $(abc-ab-bc-ca+a+b+c)^3 \geq 27abc$

Kushti është ekuivalent me $ab+bc+ca=abc$ prandaj mjafton të tregohet që

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Mosbarazimi I fundit është i vërtetë nga mosbarazimi MA-MGj.