Kodi: ____________________

OMK 2018 - KLASA E 9-TË

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

27 Janar 2018

Detyra 1. Të zgjidhet inekuacioni $2|x-2|-3|x+3|>3-x$.

Detyra 2. Nxënësi shënoi në tabelë numrat prej 1 deri në 18 njëri pas tjetrit dhe fitoi numrin të cilin e shënoi me x. Pra $x=123456789101112131415161718$. Tregoni se x^3+3x^2+2x plotpjesëtohet me 990.

Detyra 3. Le të jenë a,b numra realë pozitiv të tillë që $a\geq 2b$. Tregoni se vlen

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq\frac{9a}{4}.$$

Detyra 4. Është dhënë katërkëndëshi tetivial (ciklik) $ABCD$. Simetralja e brinjës CD i pret segmentet AD dhe BD në pikat P dhe Q, përkatësisht. Tregoni se $\measuredangle ACQ=\measuredangle PCB$.

Detyra 5. Le të jenë a^3, b^3, c^3 dhe d^3 numra të çfarëdoshëm natyrorë. Tregoni se ekzistojnë dy prej tyre të tillë që ndryshimi i tyre plotpjesëtohet me 7.

ZGJIDHJET

Detyra 1. Të zgjidhet inekuacioni

$$2|x-2|-3|x+3|>3-x.$$

Zgjidhja. Dallojmë rastet:

1) $x\in(-\infty,-3)$, 2) $x\in[-3,2)$, 3) $x\in[2,\infty)$

Në rastin e parë merret inekuacioni $2(2-x)-3(-x-3)>3-x$ i cili ka zgjidhjen $x>-5$.

Në rastin e dytë merret inekuacioni $2(2-x)-3(x+3)>3-x$ i cili ka zgjidhje $x<-2$.

Në rastine tretë merret inekuacioni $2(x-2)-3(x+3)>3-x$ i cili nuk ka zgjidhje.

Përfundimisht $x\in(-5,-2)$.

Detyra 2. Nxënësi shënoi në tabelë numrat prej 1 deri në 18 njëri pas tjetrit dhe fitoi numrin të cilin e shënoi me x. Pra $x=123456789101112131415161718$. Tregoni se x^3+3x^2+2x plotpjesëtohet me 990.

Zgjidhja.

Së pari vërejmë se $x^3+3x^2+2x=x(x^2+3x+2)=x(x+1)(x+2)$.

Numri $x=123456789101112131415161718$ duke qenë numër çift plotpjesëtohet me 2. Meqë shumë e shifrave të numrit $x=123456789101112131415161718$ është 90 përfundojmë se $x=123456789101112131415161718$ plotpjesëtohet me 9. D.m.th. x plotpjesëtohet me 18.

Tregojmë se

$$x+1=123456789101112131415161718+1=123456789101112131415161719$$

plotpjesëtohet me 11.

Meqë

$$1-2+3-4+5-6+7-8+9-1+0-1+1-1+2-1+3-1+4+1+5+1+6+1+7+1+9=33$$

dhe meqë 33 plotpjesëtohet me 11 edhe numri $x+1$ plotpjesëtohet me 11.

Dhe në fund

$$x+2=123456789101112131415161718+2=123456789101112131415161720$$

plotpjesëtohet me 5.

Kështu numri $x(x+1)(x+2)$ plotpjesëtohet me $2\cdot 9\cdot 11\cdot 5=990$, gjë që duhej treguar.

Detyra 3. Le të jenë a, b numra realë pozitiv të tillë që $a \geq 2b$. Tregoni se vlen

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{9a}{4}.$$

Zgjidhja. Nga mosbarazimi i peshuar MA-MGj dhe kushti kemi:

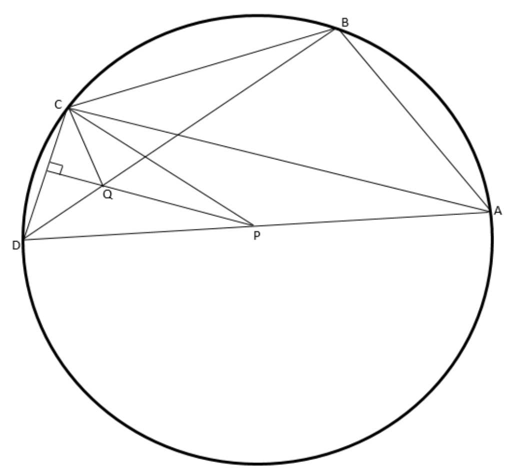
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq 8\frac{a^2}{8b} + \frac{b^2}{a} \geq 9 \cdot \sqrt[9]{\left(\frac{a^2}{8b}\right)^8 \cdot \frac{b^2}{a}} = 9 \cdot \sqrt[9]{\frac{a^{15}}{2^{24} b^6}} = \frac{9a}{4} \cdot \sqrt[9]{\frac{a^6}{(2b)^6}} \geq \frac{9a}{4},$$

gjë që duhej treguar.

Detyra 4. Është dhënë katërkëndëshi tetivial (ciklik) $ABCD$. Simetralja e brinjës CD i pret segmentet AD dhe BD në pikat P dhe Q, përkatësisht. Tregoni se $\measuredangle ACQ = \measuredangle PCB$.

Zgjidhja.

Vërejmë se $\measuredangle ACQ = \measuredangle PCB$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $\measuredangle PCQ = \measuredangle ACB$. Trekëndëshat CPD dhe CQD janë barakrahësh, sepse drejtëza PQ është simetrale e brinjës CD, prandaj $\measuredangle PCQ = \measuredangle PDQ$. Por, $\measuredangle PDQ = \measuredangle ACB$, si kënde periferike mbi tetivën e njëjtë AB, prandaj $\measuredangle PCQ = \measuredangle ACB$ dhe rrjedhimisht edhe $\measuredangle ACQ = \measuredangle PCB$.



Detyra 5. Le të jenë a^3, b^3, c^3 dhe d^3 numra të çfarëdoshëm natyrorë. Tregoni se ekzistojnë dy prej tyre të tillë që ndryshimi i tyre plotpjesëtohet me 7.

Zgjidhja. Shqyrtojmë mbetjet gjatë pjesëtimit të n^3 me 7. Le të jetë $n = 7k \pm l, k \in N$ dhe $l \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Tani, $n^3 = (7k \pm l)^3 = 7k_1 \pm l^3$, prej nga rrjedh se $n^3 \equiv 0,1,6 (mod\ 7)$. Tani, meqë i kemi katër numra a^3, b^3, c^3 dhe d^3 është e qartë se dy prej tyre e kanë mbetjen e njëjtë kur pjesëtohen me numrin 7, rrjedhimisht ndryshimi i tyre plotpjesëtohet me 7.