Kl. XII.

Detyra 1. Të gjendet numri treshifror katrori i të cilit është i barabartë me fuqinë e pestë të shumës së shifrave të tij.

Zgjidhje. Le të jenë a, b, c shifrat e numrit të kërkuar treshifrorë N. Atëherë,

$$N = 100a + 10b + c, \qquad (1),$$

dhe, sipas kushtit të detyrës,

$$N^2 = (a+b+c)^5 \ , \qquad (2)$$

prej nga rrjedh se

$$N = (a+b+c)^2 \cdot \sqrt{a+b+c} \qquad (3)$$

Nga barazimi i fundit rrjedh se: Nëse numri i kërkuar N ekziston, atëherë shuma e shifrave të tij $(a + b + c)$ është, po ashtu, katror i një numri tjetër të plotë. (Në të vërtet, nga (3) rrjedh se $a + b + c = \frac{N^2}{(a+b+c)^4}$).

Më tej, meqë N është numër treshifrorë, vlen

$$10^2 = 100 \leq N < 1000 = 10^3 \qquad (4)$$

Nga (2) dhe (4) rrjedh se

$$5 < 10^{\frac{4}{5}} \leq a+b+c = N^{\frac{2}{5}} < 10^{\frac{6}{5}} < 16.$$

Meqë $5 < a + b + c < 16$ dhe meqë $(a + b + c)$ është katror i një numri të plotë rrjedh se $a + b + c = 9 = 3^2$, sepse 9 është i vetmi numër ndërmjet 5 dhe 6 që është katror i një numri të plotë. Tash, për $a + b + c = 9$, nga (3) rrjedh se $N = 9^2 \cdot \sqrt{9} = 81 \cdot 3 = 243$. Pra, $N = 243$ është numri i kërkuar. ■

Detyra 2. Shuma e të gjithë koeficientëve të një polinomi $P(x)$ është e barabartë me 2 kurse shuma e të gjithë koeficientëve pranë fuqive të x me tregues (eksponent) tek është e barabartë me shumën e të gjithë koeficientëve pranë fuqive të x me tregues çift. Të gjendet mbetja e pjesëtimit të polinomit $P(x)$ me $x^2 - 1$.

Zgjidhje. Le të jetë

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n, \qquad (1)$$

polinomi i dhënë. Sipas kushteve të detyrës vlen

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n = 2 \qquad (2)$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots \quad . \qquad (3)$$

Meqë $x^2 - 1$ është polinom i shkallës së dytë, gjatë pjesëtimit të polinomit $P(x)$ me $x^2 - 1$, mbetja është polinom i shkallës së parë, d.m.th. polinom i formës

$$R(x) = ax + b,$$

ku a dhe b janë numra realë të cilët duhet gjetur. Nëse me $Q(x)$ shënojmë herësin e pjesëtimit të $P(x)$ me $x^2 - 1$, kemi

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + R(x)$$

d.m.th.

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b. \qquad (4)$$

Nga (1), (2) dhe (3) rrjedh se

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2\ ;$$

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots = (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) = 0,$$

d.m.th.

$$P(1) = 2 \qquad \text{dhe} \qquad P(-1) = 0\ . \qquad (5)$$

Nga (4) për $x = 1$ dhe $x = -1$ rrjedh se $P(1) = a + b$ dhe $P(-1) = -a + b$, prej nga, duke pasur parasysh (5) :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 0 \end{cases}, \qquad \text{prej nga rrjedh se} \quad a = b = 1.$$

Prandaj, $R(x) = x + 1$ është mbetja e pjesëtimit të $P(x)$ me $x^2 - 1$. ■

Detyra 3. Le t jenë a, b, c numra kompleksë të tillë që

$$|a| = |b| = |c| = r.$$

Të tregohet se

$$\left|\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}\right| = r.$$

Zgjidhje. Le të jenë

$$u = \frac{a}{r}, \quad v = \frac{b}{r}, \quad w = \frac{c}{r} \qquad \text{d.m.th.} \quad a = ur, \quad b = vr, \quad c = wr.$$

Atëherë, duke pasur parasysh kushtin e detyrës $|a| = |b| = |c| = r$, rrjedh se

$$|u| = |v| = |w| = 1. \qquad (1)$$

dhe barazimi që duhet vërtetuar merr formën

$$\left|\frac{r^2uv+r^2vw+r^2wu}{r(u+v+w)}\right| = r \text{ d.m.th. } \left|\frac{uv+vw+wx}{u+v+w}\right| = 1 \qquad (2)$$

E vërtetojmë barazimin (2) nën kushtin që të vlej (1). Vërtet,

$$\left|\frac{uv+vw+wx}{u+v+w}\right| = \frac{|uvw|\left|\frac{uv+vw+wx}{uvw}\right|}{|u+v+w|} = |u||v||w|\frac{\left|\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right|}{|u+v+w|} = \big(sipas\ (1)\big) =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1\,\frac{|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|}{|u+v+w|} = \frac{|\overline{u+v+w}|}{|u+v+w|} = 1,$$

sepse për çdo numër kompleks z vlen $|\bar{z}| = |z|$ ku $\bar{z}$ shënon numrin kompleks të koniuguar me numrin z. ■

Detyra 4. Në mesin e të gjitha sipërfaqeve drejtkëndëshe me gjatësi të dijagonales d të gjendet ajo me syprinën më të madhe.

Zgjidhja. Le të jenë x dhe y gjatësitë e brinjëve të sipërfaqes drejtkëndëshe gjatësia e dijagonalës të së cilës është d. Atëherë $S = xy$ është syprina e asaj sipërfaqeje drejtkëndëshe dhe (sipas teoremës së Pitagorës) $x^2 + y^2 = d^2$ (vizatoni figurën !), kështu që

$y = \sqrt{d^2 - x^2}$. Pra,

$$S = x\sqrt{d^2 - x^2}.$$

Natyrisht, $0 \le x \le d$ (gjatësia e brinjës është numër jonegativ jo më i madh se gjatësia e diagonales). Prandaj, duhet gjetur atë vlerë të x për të cilën funksioni (syprina) $S = S(x) = x\sqrt{d^2 - x^2}$ arrin vlerën maksimale në segmentin $[0, d]$. Së bashku me funksionin $S(x)$

shohim edhe funksionin

$$f(x) = [S(x)]^2 = x^2(d^2 - x^2) = d^2x^2 - x^4.$$

Meqë $S = S(x)$ është funksion jonegativ (sepse syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe nuk mund të jetë negative), përfundojmë se funksonet f dhe S arrijnë vlerën maksimale në të njëjtat pika. Pra, duhet gjetur vlerën $x \in [0, d]$ në të cilën funksioni f arrin vlerën maksimale.

Meqë $f'(x) = 2d^2x - 4x^3 = 2x(d^2 - 2x^2)$ nga

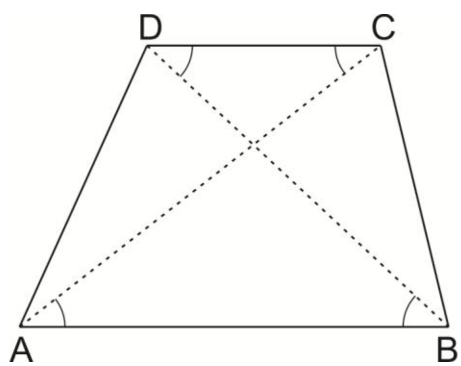
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(d^2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Meqenëse $f(0) = 0$, $f(\frac{d}{\sqrt{2}}) = \frac{d^4}{4}$ dhe $f(d) = 0$, përfundojmë se funksioni $f = S^2$ e së bashku me te edhe funksioni S arrin vlerën më të madhe në pikën $x = \frac{d}{\sqrt{2}} \in [0, d]$. Nga $y = \sqrt{d^2 - x^2}\}$, për $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ rrjedh se $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Pra $x = y = \frac{d}{\sqrt{2}}$, që d.m.th. se në mesin e të gjitha sipërfaqeve drejtkëndëshe me gjatësi diagonaleje d syprinën më të madhe e ka katrori me gjatësi brinje $\frac{d}{\sqrt{2}}$. ■

Detyra 5. Në qoftë se $|AB|$ dhe $|CD|$ janë gjatësitë e bazave të trapezit $ABCD$ të vërtetohet se

$$\frac{|AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2}{|CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2}{|CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2}.$$

Zgjidhje.



Nga $\measuredangle ABC$ dhe $\measuredangle ACD$ sipas teoremës së kosinusit, rrjedh se

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot cos\angle(BAC),$$

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 - 2|AC| \cdot |CD| \cdot cos\angle(ACD),$$

prej nga rrjedh se

$$2|AB| \cdot |AC| \cdot cos\angle(BAC) = |AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2, \qquad (1)$$

$$2|AC| \cdot |CD| \cdot cos\angle(ACD) = |CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2. \qquad (2)$$

Meqë $\angle(BAC)$ = ∠(ACD) (si kënde shndërrues (alternativ)), përfundojmë se $cos\angle(BAC)$ = $cos\,\angle(ACD)$. Duke pasur parasysh këte barazim, duke pjesëtuar anë për anë barazimin (1) me barazimin (2), fitojmë

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2}{|CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2}. \qquad (*)$$

Ngjashëm, nga $\triangle ABD$ dhe $\triangle BCD$ sipas teoremës së kosinusit, rrjedh se

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB| \cdot |BD| \cdot cos\angle(ABD),$$

$$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 - 2|BD| \cdot |CD| \cdot cos\angle(BDC),$$

prej nga rrjedh se

$$2|AB| \cdot |BD| \cdot cos\angle(ABD) = |AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2, \qquad (3)$$

$$2|BD| \cdot |CD| \cdot cos\angle(BDC) = |CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2. \qquad (4)$$

Meqë $\angle(ABD)$ = $\angle$(BDC) (si kënde shndërrues (alternativ)), përfundojmë se $cos\angle(ABD) = cos\,\angle(BDC)$. Duke pasur parasysh këte barazim, duke pjesëtuar anë për anë barazimin (3) me barazimin (4), fitojmë

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2}{|CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2}. \qquad (**)$$

Barazimet (*) dhe (**) janë pikërisht barazimet e kërkuara.■