Detyra 1. Në qoftë se numrat realë $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$ e plotësojnë barazimin

$$a^2b^2(a^2b^2+4) = 2(a^6+b^6),$$

të vërtetohet se a dhe b të dytë nuk mund të jenë racionalë.

Zgjidhje. Barazimin e dhënë e shkruajmë kështu:

$$a^4b^4 - 2a^6 - 2b^6 + 4a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow a^4(b^4-2a^2) - 2b^2(b^4-2a^2) = 0 \Leftrightarrow (a^4-2b^2)(b^4-2a^2) = 0,$$

prej nga rrjedh se $a^4 = 2b^2$ ose $b^4 = 2a^2$, d.m.th. $\frac{a^2}{b} = \pm\sqrt{2}$ ose $\frac{b^2}{a} = \pm\sqrt{2}$, prej nga shihet se të dy nuk mund të jenë numra racionalë (sepse atëherë edhe $\sqrt{2}$ do t'ishte numër racional). ■

Detyra 2. Të gjendet bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit

$$|2x+1| + |x-1| = 2 - x.$$

Detyra 3. Të tregohet se shuma

$$S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + \cdots + 5^{2016}$$

plotpjesëtohet me 31.

Zgjidhje. Meqë 2016 plotpjesëtohet me 3, shumën e dhënë e ndajmë në shumë të nga tre mbledhorëve; kështu

$$S = (5+5^2+5^3) + (5^4+5^5+5^6) + \cdots + (5^{2014}+5^{2015}+5^{2016}) =$$

$$= 5(1+5+5^2) + 5^4(1+5+5^2) + \cdots + 5^{2014}(1+5+5^2) =$$

$$= (1+5+5^2)(5+5^4+5^7+\cdots+5^{2014}) = 31 \cdot (5+5^4+5^7+\cdots+5^{2014}),$$

prej nga shihet se S plotpjesëtohet me 31. ■

Detyra 4. Në planetin Papalla viti i ka 400 ditë të cilat janë të numruara me numrat 1 - 400. Festat bijnë në ditët e numruara me shumëfisha të numrit 6. Qeveria e re në Papalla e ka reformuar kalendarin duke e ndarë vitin në 10 muaj secili prej të cilëve i ka nga 40 ditë. Ditët e çdo muaji numrohen me numrat 1-40 dhe rregulla që festat të bijnë në ditët e muajit të numëruara me shumëfishat e numrit 6 mbetet në fuqi. Të tregohet se pas reformës numri i festave gjatë një viti zvogëlohet për më pak se 10 % .

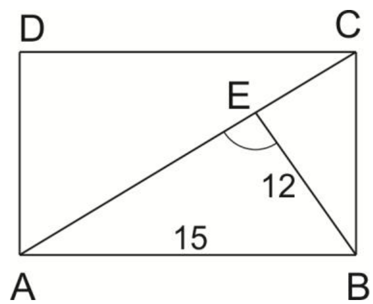
Zgidhje. Meqë $400 : 6 = 66 + \frac{4}{6}$ përfundojmë se në planetin Papalla (para reformës së kalendarit) gjatë një viti kanë qenë 66 festa.

Pas reformimit të kalendarit kur viti është ndarë në 10 muaj me nga 40 ditë, meqë $40 : 6 = 6 + \frac{4}{6}$, përfundojmë se gjatë çdo muaji kanë qenë nga 6 festa, kështu që gjatë një viti kanë qenë $6 \cdot 10 = 60$ festa.

Meqë $66 - 60 = 6$ përfundojmë se pas reformimit të kalendarit numri i festave është zvogëluar për 6. Meqë $6 < 6{,}6 = \frac{66}{10} = 66 \cdot \frac{10}{100} = 66 \cdot 10 \backslash\%$ përfundojmë se numri i festave është zvogëluar për më pak se 10 % . ■

Detyra 5. Është dhënë drejtkëndëshi me gjatësi të njerës brinjë $|AB| = 15\ cm$ dhe me gjatësi të lartësisë $|BE| = 12\ cm$ të lëshuar nga kulmi B në diagonalen AC. Të njehsohet perimetri dhe syprina e sipërfaqes drejtkëndëshe $ABCD$.

Zgjidhje. Në figurën vijuese është vizatuar drejtkëndëshi $ABCD$ dhe elementet e tij të dhëna në detyrë.



Nga trekëndëshi kënddrejtë ABE, sipas teoremës së Pitagorës, gjejmë se

$$|AE| = \sqrt{|AB^2 - |BE|^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Meqë BE është lartësia e trekëndëshit kënddrejtë ABC e lëshuar nga kulmi B në hipotenuzën AC, përfundojmë se

$$|BE| = \sqrt{|AE| \cdot |EC|} \Rightarrow |EC| = \frac{|BE|^2}{|AE|} = \frac{12^2}{9} = 16.$$

Tash, nga trekëndëshi kënddrejtë BEC, sipas teoremës së Pitagorës, gjejmë se

$$|BC| = \sqrt{|BE|^2 + |EC|^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20.$$

(Ose: nga trekëndëshi kënddrejtë ABC rrjedh se

$$|BC| = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{(|AE| + |EC|)^2 - |AB|^2} = \sqrt{(9+16)^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20.)$$

Meqë $a = |AB| = 15$ dhe $b = |BC| = 20$ qenkan përmasat e sipërfaqes drejtkëndëshe $ABCD$, përfundojmë se perimetri P dhe syprina S e asaj sipërfaqe janë

$$P = 2(a+b) = 2(15 + 20) = 70\ cm \quad \text{dhe} \quad S = a \cdot b = 15 \cdot 20 = 300\ cm^2. \ \blacksquare$$

Detyra 2 Të gjendet bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit

$$|2x+1| + |x-1| = 2 - x.$$

Zgjidhje. Kërkojmë zgjidhjet e ekuacionit të dhënë në secilin prej këtyre intervaleve.

1) Për $x\backslash in\ \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, d.m.th. për $x < -\frac{1}{2}$ rrjedh që $2x + 1 < 0$ dhe $x - 1 < 0$, kështu që $|2x + 1| = -(2x+1)$ dhe $|x-1| = -(x-1)$. Prandaj, në këtë rast, ekuacioni i dhënë merr formën:

-(2x+1)-(x-1) = 2 - x \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty, -\frac{1}{2}).

$$

Prandaj, $x=-1$ është një zgjidhje e ekuacionit të dhënë.

2) Për $x \in [-\frac{1}{2},1)$ d.m.th. për $- \frac{1}{2}\leq x < 1$ rrjedh që $x+\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow 2x+1 >0$ dhe $x-1 < 0,$ kështu që $|2x+1| = 2x+1$ dhe $|x-1|=-(x-1).$ Prandaj, në këtë rast, ekuacioni i dhënë është ekuivalent me:

$$

2x+1-(x-1)=2-x \Leftrightarrow x=0 \in [-\frac{1}{2},1).

$$

Prandaj, $x=0$ është një zgjidhje tjetër e ekuacionit të dhënë.

3) Në qoftë se $x \in [1,+\infty),$ d.m.th. nëse $x\geq 1,$ atëherë $2x+1>0$ dhe $x-1 >0,$ kështu që $|2x+1|= 2x+1$ dhe $|x-1|=x-1.$ Prandaj, ekuacioni i dhënë është ekuivalent me:

$$
2x+1 + x-1 = 2-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin [1,+\infty).
$$

Rrjedhimisht, $x=\frac{1}{2}$ nuk është zgjidhje e ekuacionit të dhënë.

Përfundimisht, $\{-1,0\}$ është bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit të dhënë.