Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Kodi: ___________________

OMK 2018 - <u>KLASA E 10-TË</u>

Koha në dispozicion: 180 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 20 pikë.

Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Sukses!

27 Janar 2018

Detyra 1. Gjeni mbetjen nga pjesëtimi i numrit

$$1!+2!+3!+\ldots+2018!$$

me numrin 12.

Detyra 2. Të caktohen numrat natyrorë a, b, c, d, e ashtu që

$$2<a<b<c<d<e \quad \text{dhe} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1.$$

Detyra 3. Është dhënë katërkëndëshi tetivial (ciklik) i tillë që:

$$AB=BC=CD=a,\, DA=b \text{ dhe } AC=c.$$

Tregoni se vlen $13a+4b\geq 12c.$ Kur arrihet barazimi?

Detyra 4. Gjeni gjithë numrat natyrorë k të tillë që për çdo numër natyror n, numri $1^k+3^k+\ldots+(2n-1)^k$ është katror i plotë.

Detyra 5. Le të jenë x, y, z numra realë të tillë që:

$$x^2+y^2+z^2=3x+2y+z+3.$$

Gjeni vlerën maksimale të shprehjes $x+2y+3z$.

Zgjidhjet.

Detyra 1. Gjeni mbetjen nga pjesëtimi i numrit të fituar nga shuma

$$1!+2!+3!+\ldots+2018!$$

me numrin 12.

Zgjidhja. Vërejmë se $4!=24\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,12)$, pra për $k\geq 4$,

$$k!=k\cdot(k-1)\cdots 5\cdot 4!\equiv k\cdot(k-1)\cdots 5\cdot 0\equiv 0(\mathrm{mod}\,12).$$

Në këtë mënyrë gjejmë se:

$$1!+2!+3!+\ldots+2018!\equiv 1!+2!+3!+0+\ldots+0\equiv 9(\mathrm{mod}\,12),$$

që d.m.th se mbetja është 9, kur shuma në fillim pjesëtohet me 12.

Detyra 2. Të caktohen numrat natyrorë a,b,c,d,e ashtu që

$$2<a<b<c<d<e \quad \text{dhe} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$$

Zgjidhja. 1^0) Le të jenë $a,b,c,d,e\in\mathbb{N}$ dhe le të vlejnë relacionet e mësipërme. Pasi që $2<a<b<c<d<e$, do të thotë se $a\geq 3, b\geq 4, c\geq 5, d\geq 6, e\geq 7$

Është e qartë se: $\frac{5}{e}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1<\frac{5}{a}$ prandaj $a<5$, që do të thotë se $a=3$ ose $a=4$.

Nëse $a=4$, atëherë: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ si dhe

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leq\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{1066}{1680}<\frac{3}{4}$$

gjë që nuk ka zgjidhje, prandaj mbetet $a=3$.

2^0) Për $a=3$, fitojmë: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{2}{3}$ si dhe $4\leq b<c<d<e$.

Atëherë, $\frac{4}{e}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{2}{3}<\frac{4}{b}$ prej nga rrjedh se $b<6$, që do të thotë se $b=4$ ose $b=5$.

Nëse $b=5$, atëherë: $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$ si dhe

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leq\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{146}{336}<\frac{7}{15}$$

gjë që nuk ka zgjidhje, prandaj mbetet $b=4$.

3^0) Për $a=3,\ b=4$ fitojmë $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}\quad \cdots\ (*)$ si dhe $5\le c<d<e$.

Atëherë, $\frac{3}{e}<\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{5}{12}<\frac{3}{c}$ prej nga rrjedh se $c<\frac{36}{5}$, përkatësisht $c=5$ ose $c=6$ ose $c=7$.

Nëse $c=7$, atëherë $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\overset{(*)}{=}\frac{5}{12}-\frac{1}{7}=\frac{23}{84}$ si dhe $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\le\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{17}{72}<\frac{23}{84}$

gjë që nuk ka zgjidhje në këtë rast, prandaj mbetet $c=5$ ose $c=6$.

Nëse $c=6$, atëherë $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\overset{(*)}{=}\frac{5}{12}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$, prandaj $\frac{2}{e}<\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{1}{4}<\frac{2}{d}$ prej nga rrjedh se $d<8$. Në këtë rast, e vetmja mundësi është $d=7$, rrjedhimisht $\frac{1}{e}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$ prej nga shihet se $\boldsymbol{e}$ nuk është numër natyrorë. Prandaj, mbetet të jetë $c=5$.

4^0) Për $a=3,\ b=4,\ c=5$, atëherë: $\frac{2}{e}<\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\le\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{13}{42}<\frac{2}{d}$ prej nga rrjedh se $d<\frac{84}{13}$. I vetmi opcion mbetet $d=6$.

Atëherë, fitojmë: $\frac{1}{e}=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{20}$ prej nga $e=20$.

Përfundimisht, zgjidhja është: $a=3;\ b=4;\ c=5;\ d=6;\ e=20$.

Detyra 3. Është dhënë katërkëndëshi tetivial (ciklik) i tillë që:

$$AB=BC=CD=a, DA=b \text{ dhe } AC=c.$$

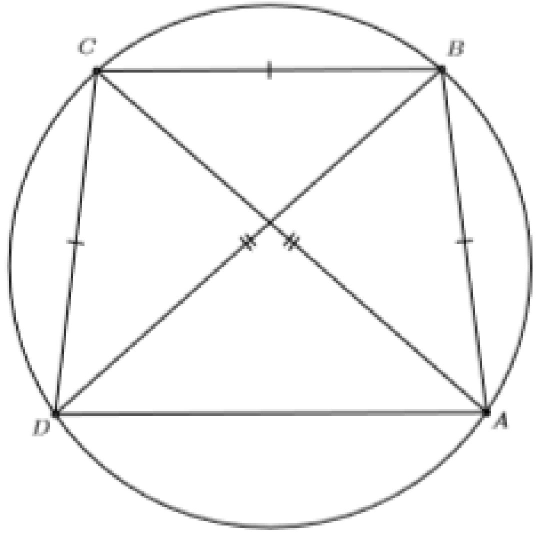
Tregon se vlen $13a+4b\ge 12c$. Kur arrihet barazimi?

Zgjidhja. Meqë katërkëndëshi është ciklik dhe meqë $|AB|=|BC|=|CD|$ kemi që trekëndëshat ABC dhe BCD janë të ngjashëm prandaj kemi që AC=BD=c. Nga Teorema e Ptolemeut kemi që

$$|AB||CD|+|BC||DA|=|AC||BD|\Rightarrow a^2+ab=c^2\Rightarrow a+b=\frac{c^2}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{13a}{4}+b=\frac{c^2}{a}+\frac{9a}{4}\ge 2\cdot\sqrt{\frac{c^2}{a}\cdot\frac{9a}{4}}=3c\Rightarrow 13a+4b\ge 12c.$$

Shfrytëzuam mosbarazimin MA-MGJ. Barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur $\frac{c^2}{a}=\frac{9a}{4}\Rightarrow 2c=3a$. Marrim $a=4t$ kemi që $c=6t$ atëherë nga $a+b=\frac{c^2}{a}\Rightarrow b=5t$. Prandaj barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur katërkëndëshi ABCD është trapez barakrahësh ku BC paralele me DA si dhe $|AB|=|BC|=|CD|=4t, |DA|=5t$ për çfarëdo numri real pozitiv t.



Detyra 4. Gjeni gjithë numrat natyrorë k të tillë që për çdo numër natyror n, numri

$$1^k+3^k+\ldots+(2n-1)^k \text{ është katror i plotë.}$$

Zgjidhja. Për $n=2$ duhet që 1^k+3^k të jetë katror i plotë, pra ekziston numri $t\in\mathbb{N}$ ashtu që $1+3^k=t^2 \Rightarrow 3^k=(t-1)(t+1)$. Meqë $t+1-(t-1)=2$ kemi që $pmmp(t-1,t+1)|2$. Por meqë 3^k është numër tek atëherë kemi që $pmmp(t-1,t+1)=1$. Meqë ana e majtë ka faktor të thjeshtë vetëm numrin 3 kemi që $t-1=1\Rightarrow t=2$ nga marrim $k=1$. Prandaj $k=1$ është mundësia e vetme, mbetet të tregojmë që kur marrim $k=1$ atëherë numri $1^k+3^k+\ldots+(2n-1)^k$ është katror i plotë për çdo $n\in\mathbb{N}$.

Mirëpo nga identiteti i njohur $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ përfundojmë që $k=1$ është zgjidhja e vetme.

Detyra 5. Le të jenë x,y,z numra realë të tillë që

$$x^2+y^2+z^2=3x+2y+z+3.$$

Gjeni vlerën maksimale të shprehjes $x+2y+3z$.

Zgjidhja. Kushti i detyrës është i barazvlefshëm me:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}.$$

Le të jenë a,b,c numra realë, atëherë nga mosbarazimi i Koshi-Shvarc kemi:

$$14\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(a+2b+3c)^2. \qquad (1)$$

Nësë në mosbarazimin (1) e zëvendësojmë $a = x - \frac{3}{2}, b = y - 1$ dhe $c = z - \frac{1}{2}$, atëherë do të fitojmë këtë mosbarazim:

$$(x + 2y + 3z - 5)^2 \le 14\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 7 \cdot 13. \qquad (2)$$

Pas disa rregullimeve marrim këtë mozbarazim:

$$x + 2y + 3z \le 5 + \sqrt{91}.$$

Tani tregojmë se ekzistojnë numrat realë x, y, z të tillë që $x + 2y + 3z = 5 + \sqrt{91}$. Në mozbarazimin (2), barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\frac{2x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{2z-1}{6},$$

prej nga gjejmë se $y = 2x - 2$ dhe $z = 3x - 4$.

Pasi t'i zëvendesojmë vlerat në kushtin e detyrës gjejmë se $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{3}{17}}}{2}$.

Nëse marrim $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{\frac{3}{17}}}{2}$, atëherë $y = 1 - \sqrt{\frac{3}{17}}$ dhe $z = \frac{1}{2} - 3\frac{\sqrt{\frac{3}{17}}}{2}$.

Pra, $\max\{x + 2y + 3z : x, y, z \in R\} = 5 + \sqrt{91}.$