



Fakulteti i Shkencave Matematike - Natyrore

Provimi pranues nga Matematika - Departamenti i Matematikës (19.09.2022)
Programi Matematikë, Matematikë financiare dhe Shkencë kompjuterike

KUJDES: Rezultatet duhet të jenë të shoqëruara me zgjidhjen përkatëse të detyrës. Në të kundërtën detyra nuk vlerësohet. Çdo detyrë e zgjidhur saktë, vlerësohet me 10 pikë.

Emri dhe mbiemri _____ Nr. i dosjes _____

1. Janë dhënë bashkësitë: $A = \{n | n \in \mathbb{N} \text{ dhe } n^2 \leq 9\}$ dhe $B = \{m | m \in \mathbb{Z} \text{ dhe } m^2 < 2\}$.
Njehsoni: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ dhe $A \times B$.

2. Të thjeshtohet shprehja:

$$\frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1} : \left(\frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{1}{1-a} + \frac{a}{a+1} - \frac{2}{a+1} \right) \quad (a \neq 1, -1, 1/2).$$

3. Është dhënë funksioni $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$ i dhënë me barazimin $f(x) = \frac{-x+5}{x+3} - x^2$.

Njehsoni $f(-2) - f\left(\frac{3}{2}\right)$.

4. Të zgjidhet ekuacioni: $5x - |4 - x| + 10 = 0$ në bashkësinë e numrave realë.

5. Caktoni parametrin real m ashtu që ekuacioni: $x^2 + 2(m+1)x + (m^2 + 3m + 2) = 0$ të ketë zgjidhje reale të dyfishtë?

6. Nje çmim prej 300 EUR u ndahet tre vendeve të para të një gare. Raporti i lartësisë së çmimit në raport me vendin e fituar (I:II:III) është 3: 2: 1 në favor të vendit të parë. Sa euro fiton vendi i parë, sa i dyti dhe sa i treti?

7. Në një arkë ndodhen 80 monedha në vlerë prej 0.5 EUR dhe 0.2 EUR. Nëse vlera e përgjithshme e tyre është 21.1 EUR, atëherë sa monedha në vlerë prej 0.5 EUR dhe sa në vlerë prej 0.2 EUR ndodhen në arkë?

8. Alba ka 10000 EUR dhe dëshiron t'i depozitohet në një bankë me normë nominale të interesit $i = 5.5\%$, por fatkeqësisht një bankë e tillë nuk ekziston. Në vend të kësaj, ajo ka hasur në dy banka: bankën A, me normë nominale të interesit $i_1 = 6\%$ dhe bankën B me normë nominale të interesit $i_2 = 4\%$. Alba e dinë mirë faktin se nga banka A do të fitonte më shumë interes vjetor, por edhe shkalla e rrezikut do të ishte më e lartë. Sa EUR duhet depozituar në bankën A dhe sa në bankën B, në mënyrë që Alba të fitojë interes vjetor 5.5% në tërë kapitalin prej 10000 EUR?

9. Të zgjidhet jobarazimi: $\frac{x^2+1}{x+3} \geq 1$ në bashkësinë e numrave realë.

10. Të zgjidhet ekuacioni: $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 = 0$ në bashkësinë e numrave realë.

$$\textcircled{1} A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{-1, 0, 1\}$$

$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$

$$A \setminus B = \{2, 3\}$$

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (3, -1), (3, 0), (3, 1)\}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \frac{4a^2 - 1}{a^3 - a^2 - a + 1} &: \left(\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{1}{1-a} \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{2}{a+1} \right) \\ &= \frac{(2a)^2 - 1}{a^2(a-1) - (a-1)} : \left(\frac{a}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)(a+1)} - \frac{2}{a+1} \right) \\ &= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a^2-1)(a-1)} : \frac{a(a+1) + a(a-1) - 2(a-1)^2}{(a-1)^2(a+1)} \\ &= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-1)^2 \cdot (a+1)} : \frac{a^2 + a + a^2 - a - 2(a^2 - 2a + 1)}{(a-1)^2(a+1)} \\ &= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-1)^2 \cdot (a+1)} : \frac{2a^2 - 2a^2 + 4a - 2}{(a-1)^2(a+1)} \\ &= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-1)^2 \cdot (a+1)} : \frac{2(2a-1)}{(a-1)^2(a+1)} = \\ &= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-1)^2(a+1)} \cdot \frac{(a-1)^2(a+1)}{2(2a-1)} = \frac{2a+1}{2} = a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad f(-2) = \frac{-(-2)+5}{-2+3} - (-2)^2 = \frac{2+5}{1} - 4 = 7 - 4 = 7 - 4 = 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}+5}{\frac{3}{2}+3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{\frac{-3+10}{2}}{\frac{3+6}{2}} - \frac{9}{4} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{7}{9} - \frac{9}{4} = \frac{28-81}{36} = \frac{-53}{36}$$

$$f(-2) - f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - \left(-\frac{53}{36}\right) = 3 + \frac{53}{36} = \frac{3 \cdot 36 + 53}{36}$$

$$= \frac{108 + 53}{36} = \frac{161}{36}$$

④. Dallojmë rastet kur $\overbrace{4-x \geq 0}^I$ dhe $\overbrace{4-x < 0}^{II}$

Në rastin e parë $|4-x| = 4-x$ për $x \leq 4$, pra

$$5x - (4-x) + 10 = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Në rastin e dytë $5x - (-(4-x)) + 10 = 0$, për $x > 4$

$$\Rightarrow 5x + 4 - x + 10 = 0 \Rightarrow 4x + 14 = 0 \Rightarrow x = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} < 4$$

cundaj në këtë rast nuk kemi zgjidhje.

⑤ Nga kushti $(2(m+1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 + 3m + 2) = 0$ kemi

$$4(m^2 + 2m + 1) - 4(m^2 + 3m + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 - 12m - 8 = 0$$

$$\Rightarrow -4m - 4 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{I}{3} = \frac{II}{2} = \frac{III}{1} = x \Rightarrow I = 3x, II = 2x, III = x$$

$$I + II + III = 360 \Rightarrow 3x + 2x + x = 360 \Rightarrow 6x = 360 \Rightarrow x = 60$$

$\Rightarrow x = 60$, pra $I = 180$ $II = 120$ $III = 60$

$\textcircled{7}$ Zgj x - monedha $0,5 \text{ €}$ dhe y - monedha $0,2 \text{ €}$. Atëherë kemi

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 80 \\ 0,5x + 0,2y = 21,1 \end{array} \right\} \text{ Pas zgjidhjes së sistemit}$$

fitojmë $x = 17$ $y = 63$

$\textcircled{8}$ Zgj x - numri i eurove që Alba depoziton në bankën A. Atëherë $10000 - x$ euro, ajo i depoziton në bankën B. Si rrjedhim marrim ekuacionin

$$6\% x + 4\% (10000 - x) = 5,5\% \cdot 10000 \quad | \cdot 100$$

$$6x + 40000 - 4x = 55000$$

$$\Rightarrow 2x = 15000 \Rightarrow x = 7500$$

Pra 7500 € i depoziton në bankën A, kurse 2500 € në bankën B.

$$\textcircled{9} \cdot \frac{x^2+1}{x+3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+3} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-x-3}{x+3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x+3} \geq 0$$

x	-3	-1	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

~~$x \in (-3, -1) \cup [2, +\infty)$~~ $x \in (-3, -1] \cup [2, +\infty)$

$$\textcircled{10} (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 = 0$$

Zëvendësojmë $\log_2 x = t$. Si rrjedhim marrim:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+3) = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \vee t = -3$$

Nga $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$

kurse nga $\log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$