



Fakulteti i Shkencave Matematike - Natyrore

Provimi pranues nga Matematika - Departamenti i Matematikës
(20.07.2023)

Programi: Matematikë, Matematikë financiare dhe Shkencë kompjuterike

KUJDES: Të gjitha detyrat shtjellohen, përfshirë **përgjigjet (rezultatet)** dhe **patjetër duhet të jenë të shoqëruara me zgjidhjen përkatëse të detyrës**. Në të kundërtën detyra nuk vlerësohet. Për llogaritje mund të përdoren faqet e prapme të fletave.

Emri dhe Mbiemri _____ Nr. i dosjes _____

- 1) Të gjendet pjesa reale dhe imagjinare e numrit kompleks $i \cdot \frac{2+3i}{1-2i}$.
- 2) Njehsoni $\frac{2}{3x_1^3} + \frac{2}{3x_2^3}$, ku x_1, x_2 janë zerot (rrënjët) e barazimit kuadratik $2x^2 + x + 1 = 0$.
- 3) Gjeni zgjidhjet e barazimit trigonometrik: $\cos x = \sin 2x$, në segmentin $[0, 2\pi]$.
- 4) Gjeni ekuacionin e rrethit, që ka qendrën në pikën $Q(1,3)$ dhe ka për tangjentë, drejtëzën $x - y + 1 = 0$.
- 5) Cmimi i një artikulli që kushton 10 euro, pëson rritje prej 10% dhe pas një jave, është rritur serish për 20%. Sa është cmimi i tanishëm i këtij artikulli.
- 6) Të zgjidhet barazimi: $2^{2x-\frac{1}{3}} = 8^{1-3x}$.
- 7) Të zgjidhet sistemi i barazimeve në vijim:
$$\begin{aligned}2x + y - z &= 3 \\x + y - 2z &= 1 \\-x + 2y + z &= -4\end{aligned}$$
- 8) Të gjenden zgjidhjet e barazimit: $x(x - 1) = 2x^2 - 6x + 4$.
- 9) Të zgjidhet pabarazimi logaritmik: $\log_2 \frac{x^2-3}{x-2} < 0$.
- 10) Të gjendet anëtari (termi) i 2023 i një progresioni aritmetik, ku diferenca në mes të anëtarit (termit) të pestë dhe të tretë është 6, kurse shuma e anëtarit (termit) të parë dhe të pestë është 10.

Koha në dispozicion: 90 minuta

SUKSESE!

Zgjidhje.

1. Meqë $i \frac{2+3i}{1-2i} = i \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = i \frac{-4+7i}{5} = \frac{-7-4i}{5}$ përfundojmë se $Re\left(i \frac{2+3i}{1-2i}\right) = -\frac{7}{5}$ dhe

$$Im\left(i \frac{2+3i}{1-2i}\right) = \frac{-4}{5}.$$

2. Meqë x_1, x_2 janë rrënjët e barazimit kuadratik $2x^2 + x + 1 = 0$ nga formulat e Vietit kemi

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \text{ dhe } x_1 x_2 = 1/2.$$

Andaj,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3x_1^3} + \frac{2}{3x_2^3} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{(x_1 x_2)^3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2)}{(x_1 x_2)^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

3. Nga indentitet $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$ kemi

$$\cos x = \sin 2x$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

Në segmentin $[0, 2\pi]$, $\cos x = 0$ për $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ndërsa $\sin x = \frac{1}{2}$ për $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Andaj, bashkësia e zgjidhjeve është $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

4. Ekuacioni i rrethit me qendër $Q(1,3)$ dhe rreze R është

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = R^2. \text{ Tani duhet ta gjejmë rrezen } R.$$

Meqë $x - y + 1 = 0$ është tangjente e rrethit, atëherë sistemi

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = R^2 \end{cases}$$

ka zgjidhje të vetme.

Nëse ekuacionin e parë të sistemit të mësipërm e zëvendësojmë ekuacioni i dytë dhe pas llogaritjeve gjejmë se $R^2 = 1/2$.

5. Pas rritjes për 10% çmimi do të jetë $10 + \frac{10}{100} 10 = 11$.

Pasi çmimi rritet serish për 20%, çmimi i tanishëm do të jetë $11 + \frac{20}{100} 11 = 13.2$.

6.

$$2^{2x - \frac{1}{3}} = 8^{1-3x}$$

$$2^{2x - \frac{1}{3}} = 2^{3(1-3x)}$$

$$2x - \frac{1}{3} = 3(1 - 3x)$$

$$2x - \frac{1}{3} = 3 - 9x$$

$$x = \frac{10}{33}$$

7. Duke mbledhur dy ekuacionit e fundit të sistemit fitojmë $z = 3y + 3$. Duke mbledhur ekuacionin e parë me ekuacionin e tretë fitojmë $x = -3y - 1$.

Duke i zëvendësuar $x = -3y - 1$ dhe $z = 3y + 3$ te ekuacioni i dytë i sistemit marrim $y = -1$. Rjedhimisht, $x = 2, y = -1$ dhe $z = 0$.

8. Ekuacioni $x(x - 1) = 2x^2 - 6x + 4$ është ekuivalent me $x^2 - x = 2x^2 - 6x + 4$, pra

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1, 4\}$$

9. Meqë $\log_2 \frac{x^2 - 3}{x - 2} < 0$ atëherë duhet të vlejë

$$0 < \frac{x^2 - 3}{x - 2} < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}\right)$$

10. Le të jetë a_n termi i përgjithshëm i vargut aritmetik. Dimë se $a_n = a_1 + (n - 1)d$, ku d është diferenca mes dy termave të njëpasnjëshme.

Nga kushti i parë i detyrës kemi $a_5 - a_3 = 6$ që na jep $2d = 6 \rightarrow d = 3$.

Tani nga kushti $a_1 + a_5 = 16$ kemi që $2a_1 + 4d = 10$ nga gjejmë së $a_1 = -1$.

Përfundimisht gjejmë,

$$a_{2023} = a_1 + 2022d = 6065.$$