

## Abstrakti

Në këtë punim masteri do të analizojmë vetitë e përgjithshme të polinomeve bazike të Bernstein-it dhe lakoreve Bézier, pastaj do të konstruojmë një përgjithësim të ri të lakoreve të Bézier-it me një parametër.

Në fillim të temës do të bëjmë një përmbledhje të shkurtër të rrugëtimit dhe sfidave që hasën matematikanët gjatë formimit dhe studimit të këtyre lakoreve.

Në vitin 1912, S.N. Bernstein [3] përkufizoi polinomet e tij të famshme të quajtura polinomet e Bernstein-it për të vërtetuar teoremën e Weierstrass-it. Për shkak të vetive të mira të përafërimit, konvergjencës dhe ruajtjes së formave, polinomet e Bernstein-it luajtën një rol të rëndësishëm në teorinë e përafërimeve ngjashëm si analiza, gjeometria dhe shkencat kompjuterike.

Lakorja klasike e Bézier-it [4] e konstruktuar me anë të funksioneve bazike të Bernstein-it është lakorja më e rëndësishme në Computer aided geometry design(CAGD). Ky përgjithësim bazohet në polinomet Lupaş  $q$ -analoge të Bernstein-it, të cilët janë përgjithësimi i parë i operatorëve të Bernstein-it në  $q$ -calculus. Këto lakore kanë disa veti të ngjashme me lakoret klasike të Bézier-it.

Në veçanti, në këtë përgjithësim do të shqyrtojmë ngritjen e shkallës dhe algoritmet e de Casteljau-t. Përveç kësaj, ne do të ndërtojmë produktin tenzorial të sipërfaqeve mbi domenën e drejtkëndëshave dhe do të studiojmë vetitë e sipërfaqeve, ngritjen e shkallës dhe algoritmin e de Casteljau-t. Duke i krahasuar lakoret dhe sipërfaqet e  $q$ -Bézier-it të cilat bazohen në polinomet e Phillips  $q$ -Bernstein, ky përgjithësim do të tregojë më shumë fleksibilitet në zgjedhjen e vlerave  $q$  dhe epërsi në kontrollin e formave të lakoreve dhe sipërfaqeve. Format e parametrave sigurojnë më shumë lehtësi në modelimin e lakoreve dhe sipërfaqeve.

Në vitet e fundit, përgjithësimi i lakoreve të Bézier-it me parametra të formave ka marrë vëmendje të vazhdueshme, Goldman dhe Barry [9] konstruktuan një lloj përgjithësimi të lakoreve të Bézier-it me një parametër të formës të quajtur lakoret e  $n$ -Bézier duke i përdorur polinomet Pólya. Han dhe të tjerët në [12] konstruktuan një përgjithësim tjetër të lakoreve të Bézier-

it duke i shtuar disa parametra polinomeve të Bernstein-it të cilat i quajti lakore Quasi-Bézier. Në vitin 2011, Chen dhe Wang [5] bënë disa përmirësime në lakoret e Quasi-Bézier, duke i bërë ato me aplikim më të gjerë në CAGD. Të gjitha këto forma të lakoreve kanë analizuar problemin e ndryshimit të formave të lakoreve dhe sipërfaqeve duke mbajtur poligonin e kontrollit të pandryshuar.

Kohëve të fundit, zhvillimet në  $q$ -calculus janë orientuar në zbulimin e përgjithësimeve të reja të polinomeve të Bernstein-it duke i përfshirë  $q$ -numrat (shih [23]). Në vitin 1987, Lupaş [19] prezantoi përgjithësimin e tij të parë të operatorit të Bernstein-it duke u bazuar në  $q$ -numrat. Në vitin 1996, Phillips [24] propozoi një variant të ri  $q$ -variant të operatorit klasik të Bernstein-it, të cilat i quajti operatorët e Phillips  $q$ -Bernstein të cilat u shprehën me anë të  $q$ -diferencave [25] dhe nxitën shumë hulumtime të tjera.  $q$ -variantet e polinomeve të Bernstein-it siguruan një parametër të formës për konstruktimin e lakoreve dhe sipërfaqeve me forma të lira, të cilat u shfrytëzuan shumë në këtë lëmi. Në vitin 2003, Oruç dhe Phillips në [20] përdorën funksionet bazike të operatorit Phillips  $q$ -Bézier për konstruktimin e lakoreve  $q$ -Bézier, të cilat ne do t'i quajmë lakoret Phillips  $q$ -Bézier dhe studiuan vetitë e shkallës së zvogëlimit dhe ngritjes, si dhe vetitë e variantit të përuljes. Në vitin 2007 Dişibuyuk dhe Oruç [6] përkufizuan  $q$ -përgjithësimin e lakoreve racionale të Bernstein-Bézier-it. Në vitin 2008, Dişibuyuk dhe Oruç [7] përkufizuan produktin tenzorial të sipërfaqeve  $q$ -Bernstein-Bézier në  $[0, 1] \times [0, 1]$  duke u bazuar në lakoret e Phillips  $q$ -Bézier. Në vitin 2012, Simeonov dhe Goldman [31] përkufizuan B-spline duke u bazuar në  $q$ -calculus dhe duke përdorur  $q$ -blossoming. Këto quhen quantum B-spline.

Duke i krahasuar me operatorët  $q$ -Bernstein-it, operatori Lupaş  $q$ -analog kishte më pak aplikim në CAGD. Në vitin 2010, Phillips [26] vërejti që nuk kishte zbatim praktik të operatorit Lupaş  $q$ -analog të Bernstein-it, atëherë në teorinë e përafrimeve u bënë disa hulumtime për konvergencën dhe përafrimin e Lupaş  $q$ -analog të Bernstein-it. Në vitin 1987, Lupaş [19] studioi vetitë e përafrimeve dhe ruajtjen e formës së këtij operatori. Në vitin 2006, Ostrovska [22] shqyrtoi konvergencën uniforme të tij. Në vitin 2010, Mahmudov

dhe Sabancıgi diskutuan problemet e përafrimit të tij. Në vitin 2011, Zoltan [36] tregoi vlerësimet e masës për operatorin Lupaş  $q$ -analog të Bernstein-it. Të gjitha rezultatet në operatorët e Lupaş  $q$ -analog të Bernstein-it na lejojnë të konstruktojmë këtë përgjithësim të lakoreve të Bézier-it.

Shumë autorë kanë konstruktuar varietete të ndryshme të lakoreve dhe sipërfaqeve Bézier. Një klasë e zgjerimit të lakores Bézier është ndërtuar nga Han dhe Liu [11], Wu dhe të tjerë [33, 34] dhe Liu [18]. Për shkak të pranisë së një parametri të formës në të gjitha punimet e cituara mësipër, kontrolli i formës së lakores Bézier është bërë më i përshtatshëm, por gjithsesi ishte i kufizuar. Han dhe të tjerë [14] sugjeroi modifikimin e formës së lakores kubike kuazi-Bézier për të rritur aftësinë e rregullimit të formës së lakores. Në [27], Qin dhe të tjerë përshkroi shtrirjen e lakores kubike Bézier me parametra të ndryshëm të formës dhe gjithashtu kushtet e vazhdimësisë dhe aplikimet e saj. Zgjerimi i lakores kuartike Bézier me tre parametra të formës është paraqitur nga Zhu dhe të tjerë [38], e cila është vazhdim i lakores Bézier të shkallës së katërt me një parametër të vetëm që përmirësoi kontrollin e formës së lakores. Në [37], zgjerimi i lakores kuartike Bézier është paraqitur nga Zhang dhe të tjerë e cila jo vetëm trashëgon vetitë e jashtëzakonshme të lakores kuadrrike të Bézier-it, por gjithashtu i përshtatet poligonit të kontrollit. Në këtë literaturë jepen edhe shembuj grafikë të lakoreve dhe sipërfaqeve. Yan dhe Liang [35] paraqitën zgjerimin e modelit Bézier me të gjitha vetitë. Lakoret dhe sipërfaqet e krijuara nga Qin dhe të tjerë [28] jo vetëm që kanë shumicën e vetive të lakoreve klasike të Bézier-it dhe sipërfaqeve të rendit  $n$ , por ato gjithashtu ndihmojnë në modifikimin e formave duke përdorur parametra të ndryshëm të formës. Hu dhe të tjerë [15, 16] përshkroi rrotullimin e sipërfaqeve duke përdorur bazën polinomiale dhe modifikimin e formës me lakore të ndryshme duke përdorur parametrat e formës. Në kapitullin e fundit do të paraqesim një lloj të ri të funksioneve bazike  $q$ -Bernstein me parametër të formës  $\lambda$  të quajtura bazat  $(\lambda, q)$ -Bernstein si dhe do të analizojmë disa veti gjeometrike të lakoreve  $(\lambda, q)$ -Bézier. Po ashtu, do të konstruktojmë produktin tenzorial të sipërfaqeve në domenën e drejtkëndëshave dhe do të studiojmë vetitë e sipërfaqeve  $(\lambda, q)$ -Bézier.

Synim i këtij punimi master është që të analizojmë klasën e funksioneve

Lupaş  $q$ -analoge të Bernstein-it në intervalin  $[0, 1]$ , do të studiojmë vetitë e kësaj klase të funksioneve, ndërtimin dhe vetitë e lakoreve të Lupaş  $q$ -Bézierit dhe do të analizojmë shkallën e ngritjes dhe algoritmin e de Casteljaui-t. Po ashtu do të përkufizojmë prodhimin tenzorial të sipërfaqeve të Bézierit në domenën e drejtkëndëshit me dy parametra duke u bazuar në funksionet e Lupaş  $q$ -analoge të Bernstein-it dhe do të studiojmë vetitë e tyre.

## References

- [1] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] M. S. Atamert, *Generalized Bezier Curves Based on Lupaş  $q$ -Analogue of the Bernstein Operator*, Thesis (M.S.)—Eastern Mediterranean University, Faculty of Arts and Sciences, Dept. of Mathematics, 2019.
- [3] S.N. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée*, Commun. Kharkov Math. Soc. 13 (1912) 1–2.
- [4] P.E. Bézier, *Numerical Control-Mathematics and applications*, John Wiley and Sons, London, 1972.
- [5] J. Chen, G.J. Wang, *A new type of the generalized Bézier curves*, Appl. Math.—J. Chin. Univ. 1 (2011) 47–56.
- [6] Ç. Dişibüyük, H. Oruç, *A generalization of rational Bernstein–Bézier curves*, BIT Numer. Math. 47 (2007) 313–323.
- [7] Ç. Dişibüyük, H. Oruç, *Tensor product  $q$ -Bernstein polynomials*, BIT Numer. Math. 48 (2008) 689–700.
- [8] G. Farin, *Curves and surfaces for computer-aided geometric design: a practical guide*, (2014) Elsevier.
- [9] R. Goldman, P. Barry, *Shape parameter deletion for Pólya curves*, Numer. Algorithms 1 (1991) 121–137.
- [10] L. Han, Y. Chu, Z. Qiu, *Generalized Bézier curves and surfaces based on Lupaş  $q$ -analogue of Bernstein operator*, J. Comput. Appl. Math., 261 (2014), pp. 352-363.
- [11] X. Han and S. Liu, *Extension for quadratic Bézier curves*, Journal of Zhongnan University, vol. 34, pp. 214–217, 2003, in Chinese.
- [12] X.A. Han, Y.C. Ma, X.L. Huang, *A novel generation of Bézier curve and surface*, J. Comput. Appl. Math. 271 (2008) 180–193.

- [13] X.A. Han, Y.C. Ma, X.L. Huang, *The cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters*, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 226–231.
- [14] X. Han, Y. Ma, and X. Huang, *Shape modification of cubic Quasi-Bézier curve*, Journal of X'ian Jiaotong University, vol. 41, pp. 903–906, 2007, in Chinese.
- [15] G. Hu, G. Wei, and J. Wu, *Shape-adjustable generalized Bézier rotation surfaces with multiple shape parameters*, Results in Mathematics, vol. 72, no. 3, pp. 1281–1313, 2017.
- [16] G. Hu, J. Wu, and X. Qin, *A novel extension of the Bézier model and its applications to surface modeling*, Advances in Engineering Software, vol. 125, pp. 27–54, 2018.
- [17] K. Khan, D. K. Lobiyal, *Generalized Bézier Curves and their Applications in Computer Aided Geometric Design*, 25/07/2018, 10.13140/RG.2.2.28551.04001.
- [18] Z. Liu, *An extension of Bézier curve*, Journal of Hefei University of Technology, vol. 27, pp. 976–979, 2004.
- [19] A. Lupaş, *A  $q$ -analogue of the Bernstein operator*, Sem. Numer. Statist. Calc. 9 (1987) 85–92.
- [20] H. Oruç, G.M. Phillips,  *$q$ -Bernstein polynomials and Bézier curves*, J. Comput. Appl. Math. 151 (2003) 1–12.
- [21] S. Ostrovska, *On the Lupaş  $q$ -analogue of the Bernstein operator*, J. Math. 5 (2006) 1615–1629.
- [22] N.I. Mahmudov, P. Sabancigil, *Some approximation properties of Lupaş  $q$ -analogue of Bernstein operators*, 2010, eprint arxiv:1012.4245v1.
- [23] G.M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer-Verlag, New York, 2003.

- [24] G.M. Phillips, *On generalized Bernstein polynomials*, in: Numerical Analysis, 1996, pp. 263–269. A.R. Mitchell 75th Birthday Volume.
- [25] G.M. Phillips, *Bernstein polynomials based on the  $q$ -integers*, Ann. Numer. Math. 4 (1997) 511–518.
- [26] G.M. Phillips, *A survey of results on the  $q$ -Bernstein polynomials*, MA J. Numer. Anal. 30 (2010) 277–288.
- [27] X. Qin, G. Hu, and S. Zhang, *New extension of cubic Bezier curve and its applications*, Journal of Computer Engineering and Applications, vol. 44, pp. 112–115, 2008.
- [28] X. Qin, G. Hu, N. Zhang, X. Shen, and Y. Yang, *A novel extension to the polynomial basis functions describing Bézier curves and surfaces of degree  $n$  with multiple shape parameters*, Applied Mathematics and Computation, vol. 223, pp. 1–16, 2013.
- [29] C. Qing-Bo, Zh. Guorong, *Properties of  $(\lambda, q)$ -Bézier Curves and Surfaces* (01/12/2018) 10.1109/CompComm.2018.8780778.
- [30] P. Simeonov, V. Zafiris, R. Goldman,  *$q$ -Blossoming: a new approach to algorithms and identities for  $q$ -Bernstein bases and  $q$ -Bézier curves*, J. Approx. Theory 164 (2012) 77–104.
- [31] P. Simeonov, R. Goldman, *Quantum B-splines*, BIT Numer. Math. (2012).
- [32] X.P. Wang, R.R. Zhou, Z.L. Ye, *Shape modification of parametric curves*, Chin. J. Aeronaut. 4 (2004) 251–259.
- [33] X. Wu and X. Han, *Extension for cubic Bézier curves*, Journal of Engineering Graphics, vol. 6, pp. 98–102, 2005.
- [34] X. Wu, X. Han, and S. Luo, *Two different extensions of quartic Bézier curve*, Journal of Engineering Graphics, vol. 5, pp. 59–64, 2006.

- [35] L. Yan and J. Liang, *An extension of the Bézier model*, Journal of Applied Mathematics and Computation, vol. 218, pp. 2863–2879, 2011.
- [36] F. Zoltan, *Quantitative estimates fo the Lupaş  $q$ -analogue of the Bernstin operator*, Demonstratio Math. 1 (2011) 123–130.
- [37] N. Zhang, X. Qin, G. Hu, and F. Dang, *New extensions of quartic Bézier curve with multiple shape parameters*, Journal of Wuhan University of Technology, vol. 31, pp. 156–160, 2009, in Chinese.
- [38] X. Zhu, Q. Guo, and G. Zhu, *Extension of the quartic Bezier ´ curve with parameters*, Journal of Hefei University of Tech nology, vol. 31, pp. 671–674, 2008, in Chinese.