

Funksionet superzeta dhe zbatimi i tyre

Erion Hamiti

Abstrakti

Në vitin 1917, Mellin konsideroi një klasë të funksioneve zeta që përcaktohen duke përdorur zerot jo-triviale të funksionit zeta të Rimanit (Riemann) për të përkufizuar një seri të re të Dirilesë (Dirichlet). Ai e bëri zgjerimin meromorf në të gjithë rrafshin kompleks për një klasë funksionesh të tilla duke përfshirë funksionin

$$Z(s) = \sum \rho_n^{-s},$$

ku shuma merret për të gjitha zerot jotriviale të funksionit zeta të Rimanit. Voros i ka kushtuar një monografi për përgjithësimet e funksioneve të tilla dhe të cilat ai i quajti **funksionet superzeta**. Ai paraqiti tre lloje funksionesh të tilla, dhe diskutoi zgjerime të tjera të mundshme të funksioneve zeta në klasë të tjera.

Qëllimi i kësaj teme të masterit është të jepen përkufizimet dhe të studiohen superzeta funksionet të përkufizuara nga Voros për funksionin zeta të Rimanit dhe superzeta funksionet në fushën e funksionit.

Le të jetë K një fushë funksionale algjebrike me genus g ku fusha e konstantes e së cilës është fusha e fundme \mathbb{F}_q . Le të jetë $Z_K(X)$ seria fuqi e mëposhtme

$$Z_K(X) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n = \prod_{D \in |Div(K)|} (1 - X^{\deg(D)})^{-1},$$

ku $C_n = \#\{D \in Div(K); D \geq 0, \deg(D) = n\}$; $Z_K(X)$ është në fakt një funksion racional, ku $L(X)$ faktorizohet në $\mathbb{C}[X]$ në formën

$$L(X) = \prod_{j=1}^{2g} (1 - \alpha_j X) \in \mathbb{Z}[X].$$

Tani, përkufizojmë funksionin zeta (klasik) ζ_K të K si më poshtë: për $s \in \mathbb{C}$, zëvendësojmë X me q^{-s} në $Z_K(X)$,

$$\zeta_K(s) = Z_K(q^{-s}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n q^{-ns},$$

e cila konvergjon për $Re(s) > 1$.

Punimi trajton ndërtimin rigoroz të funksioneve superzeta të llojit të parë dhe të dytë, studimin e vetive analitike (vazhdimësia, pole, zgjerimi meromorfik), nxjerrjen e lidhjeve me koeficientët e Liut dhe funksionet e tjera speciale, shfrytëzimin e RH-së së vërtetuar për të nxjerrë veti të reja. Punimi ka 98 faqe dhe literaturën me 15 njësi bibliografike. Punimi shtjellohet në pesë kapituj të cilët do t'i përshkruajmë në vijim.

Në kapitullin e parë, **Konceptet bazike**, në këtë kapitull janë paraqitur disa koncepte bazike nga teoria e fushave algjebrike funksionale (Algebraic Function Fields) që janë të nevojshme për të i'u qasur temës. Po ashtu janë dhënë disa pohime e teorema ndihmëse që përdoren përgjatë punimit.

Në kapitullin e dytë, **Funksionet zeta**, është trajtuar funksioni zeta në dy fusha të ndryshme, atë klasike si funksion zeta i Rimanit dhe funksionin zeta në fushën funksionale, ndër të tjera është paraqitur analogjia e përkufizimit të funksionit zeta në fushën funksionale me atë të përkufizuar në fushën e numrave kompleks, por edhe veti dalluese ndërmjet tyre.

Në kapitullin e tretë, **Koeficientët e Liut**, janë përkufizuar koeficientët e Liut dhe pastaj janë përshkruar rezultatet e kriterit të Liut në fushën e funksionit.

Në kapitullin e katërt, **Superzeta funksionet**, janë përkufizuar funksionet superzeta të dy llojeve sipas Rimanit dhe në fushën funksionale, pastaj është dhënë zgjerimi meromorf i funksionit superzeta të llojit të parë në gjysmë-rrafsh dhe pastaj janë konsideruar disa vlera speciale të tij dhe është dhënë lidhja e tyre me koeficientët e Liut dhe derivatit të tij kur s është numër i plotë negativ dhe është dhënë paraqitja integrale të tij. Pastaj janë dhënë disa vlera speciale të funksionit superzeta të llojit të dytë për numra të plotë pozitivë dhe gjithashtu lidhja e tyre me koeficientët e Liut dhe në fund si zbatim i superzeta funksioneve janë dhënë disa inekuacione për disa vlera speciale të funksioneve superzeta.