

UNIVERSITETI I PRISHTINËS “HASAN PRISHTINA”
FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE - NATYRORE
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS
PROGRAMI MASTER: MATEMATIKË ME ZBATIME



TEZA MASTER

Homologjia persistente me zbatime

Mentori:

Dr. Qëndrim GASHI

Kandidatja:

Arbesa BERISHA

Qershor 2025, Prishtinë

Qëllimisht e lënë e zbrazët
(printim në të dyja anët)

UNIVERSITY OF PRISHTINA “HASAN PRISHTINA”
FACULTY OF MATHEMATICAL AND NATURAL SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
MASTER’S PROGRAM IN MATHEMATICS WITH APPLICATIONS



MASTER’S THESIS

Persistent homology with applications

Supervisor:

Dr. Qëndrim GASHI

Thesis written by:

Arbesa BERISHA

June 2025, Pristina

Qëllimisht e lënë e zbrazët
(printim në të dyja anët)

Homologjia persistente me zbatime

Arbesa BERISHA

Abstrakti

Ky punim trajton homologjinë persistente, një metodë bazike në Analizën Topologjike të të Dhënave, që mundëson shqyrtimin e formave të të dhënave shumëdimensionale në shkallë të ndryshme. Përmes analizës së filtrimeve të vazhdueshme të komplekseve, homologjia persistente identifikon veçoritë që mbijetojnë gjatë ndryshimeve të shkallës së analizës, duke theksuar ato që përfaqësojnë struktura më të qëndrueshme në të dhënave.

Punimi fillon me paraqitjen e nocioneve bazë nga topologjia algjebrike, ndërtimin e komplekseve të simplekseve dhe teorinë klasike të homologjisë. Më pas, zhvillohet koncepti i homologjisë persistente dhe komponentët e saj kryesorë, si: filtrimet, barkodet, diagramet e persistencës dhe teorema e stabilitetit. Kjo e fundit na garanton që ndryshime të vogla në të dhënat fillestare shkaktojnë vetëm devijime të vogla në diagramet e persistencës, ku diagramet e persistencës mbeten të ngjashme dhe të qëndrueshme, duke siguruar kështu besueshmërinë në analizë.

Në pjesën praktike, fokusi është në ndërtimin e filtrimeve duke përdorur komplekset Rips dhe të Čehut, përmes të cilave i ndërtojmë të dhënave diskrete si objekte topologjike. Aplikimi përqendrohet në analizën e rrjetave funksionale të trurit, ku homologjia persistente përdoret për të studiuar ndryshimet strukturore tek individët me çrregullim të spektrit të autizmit.

Qëllimisht e lënë e zbrazët
(printim në të dyja anët)

Persistent homology with applications

Arbesa BERISHA

Abstract

This thesis explores persistent homology, an important method in Topological Data Analysis that helps us study the shape of high-dimensional data at different scales. By looking at how topological features appear and disappear across a sequence of spaces called filtrations, persistent homology shows which features are most stable and meaningful in the data.

The thesis starts by introducing basic ideas from algebraic topology, such as simplicial complexes and classical homology. It then explains persistent homology in more detail, including core concepts like filtrations, barcodes, and persistence diagrams. A key result, the stability theorem, ensures that minor perturbations in the data result in correspondingly small changes in the persistence diagrams.

In the applied part of the thesis, we build filtrations based on Rips and Čech complexes. These tools allow us to turn point cloud data into topological spaces. We apply this approach to study brain functional networks, using persistent homology to identify structural differences between individuals with autism spectrum disorder and neurotypical individuals.

Dedikimi:

Mamit dhe babit

Falënderimet

Me mirënjohje të thellë, dëshiroj të shpreh falënderimet e mia për të gjithë ata që më kanë mbështetur dhe ndihmuar në realizimin e kësaj teze.

Një falënderim veçanërisht i dedikohet familjes sime: prindërve të mi, të cilët, me dashurinë dhe mbështetjen e tyre çdo pasiguri timen e kanë kthyer në forcë dhe besim. U jam, gjithashtu, mirënjohëse motrave dhe vëllait tim, për përkrahjen e vazhdueshme dhe frymëzimin që më kanë dhënë.

Falënderoj posaçërisht mentorin tim, profesorin Qëndrim Gashi, për udhëzimet e çmuara, besimin dhe mbështetjen e tij gjatë gjithë rrugëtimit tim akademik.

Një falënderim të sinqertë shpreh edhe për profesorin Arbër Selimi, për ndihmën e tij të paçmuar dhe gatishmërinë e tij të vazhdueshme në çdo hap të këtij procesi.

Gjithashtu, u jam mirënjohëse të gjithë profesorëve të mi gjatë këtij rrugëtimi akademik, për mësimet e çmuara, përkushtimin dhe për ndikimin që kanë pasur në formimin tim si studente.

U jam mirënjohëse shoqërisë dhe kolegëve, për mbështetjen, inkurajimin dhe momentet e paharrueshme që kemi ndarë së bashku.

Kjo punë nuk do të ishte e njëjtë pa secilin prej jush.

Përmbajtja

1	Hyrje	1
2	Komplekset	4
2.1	Komplekset e simplekseve	4
2.2	Orientimi	10
2.3	Komplekset e qelizave	14
3	Homologjia simplekse	18
3.1	Një vështrim intuitiv mbi vrimat në topologji	19
3.2	Zinxhirët	20
3.3	Kufiri	22
3.4	Grupet e cikleve dhe të kufijve	27
3.5	Grupet e homologjisë	27
3.6	Llogaritja e homologjisë	35
3.7	Homologjia zero	41
3.8	Homologjia e grafeve	43
3.9	Homologjia e sipërfaqeve	45
4	Homologjia singulare	49
4.1	Delta komplekset	49
4.2	Përkufizimi i homologjisë singulare	51
4.3	H_0 dhe H_1	55
4.4	Invarianca homotopike	60
4.5	Vargu ekzakt	64
4.6	Homologjia relative	66
4.7	Vargu ekzakt i Mayer–Vietoris-it	73
4.8	ekuivalenca mes homologjisë simplekse dhe asaj singulare	79

5	Homologjia persistente	83
5.1	Intuita gjeometrike pas homologjisë persistente	84
5.2	Filtrimi i komplekseve	86
5.3	Vizualizimi i homologjisë persistente	89
5.3.1	Barkodi	89
5.3.2	Diagrami i persistencës	91
5.4	Llogaritja e homologjisë persistente	92
6	Konstruktimi i komplekseve të simplekseve	105
6.1	Komplekset Rips	105
6.2	Komplekset e Čehut	109
6.3	Kompleksi i nervit	111
6.4	Vetitë e ndërthurjes	114
7	Stabiliteti	117
7.1	Filtrimet e vazhdueshme	117
7.2	Modulete e persistencës	121
7.3	Distanca bottleneck dhe teorema e stabilitetit	126
7.4	Interpretimi dhe aplikimi	132
8	Autizmi përmes homologjisë persistente	138
8.1	Metodologjia	139
8.2	Analiza topologjike	141
8.3	Përfundimi - Interpretimi i rezultatetve	145
	Bibliografia	147

Kapitulli 1

Hyrje

Në dekadat e fundit, analiza e të dhënave ka pasur një zhvillim të rëndësishëm, duke përfshirë teknika të avancuara jo vetëm nga statistika dhe algoritmet klasike, por edhe nga topologjia algjebrike. Një nga këto zhvillime thelbësore është Homologjia Persistente, një mjet kyç i Analizës Topologjike të të Dhënave që mundëson shqyrtimin e formave të të dhënave në shkallë të ndryshme duke nxjerrë veçoritë topologjike të qëndrueshme edhe në prani të zhurmës.

Homologjia persistente përdoret për t'i analizuar strukturat topologjike, si: lidhjet, vrimat dhe boshllëqet në dimensione të ndryshme. Për ta ilustruar intuitivisht, mund të imagjinojmë formimin e një shpelle që zhvillohet me kalimin e mijëvjeçarëve nga pika të ujit: fillimisht shfaqen ndryshime të vogla, por vetëm strukturat më të qëndrueshme mbijetojnë. Në mënyrë analoge, homologjia persistente kalon nëpër filtrime të të dhënave, duke ruajtur vetëm veçoritë më të rëndësishme.

Kjo teori lindi në fillim të viteve 2000, kur u shfaq nevoja për të analizuar të dhëna komplekse dhe të zhurmshme në mënyrë topologjike. Matematikanët Herbert Edelsbrunner, David Letscher dhe Afra Zomorodian ishin ndër të parët që në vitin 2002 prezantuan një metodë për matjen e “jetëgjatësisë” së veçorive topologjike duke përdorur filtrime. Emri “homologji persistente” vjen nga fakti se ajo gjurmon se cilat veçori topologjike mbeten të qëndrueshme ndërsa ndryshon niveli i analizës.

Homologjia persistente ka gjetur zbatim në fusha të ndryshme, si neuroshkenca, mjekësia, gjenetika, inteligjenca artificiale dhe *machine learning*, duke ofruar një aparaturë për analizën e strukturave komplekse dhe shumëdimensionale.

Në këtë punim, fokusi është zhvillimi teorik i homologjisë persistente, duke filluar nga bazat e topologjisë algjebrike, ndërtimi i komplekseve, teoria klasike e homologjisë simplekse dhe singulare deri te konceptet më moderne, si: filtrimet, barkodet, diagramet e

persistencës dhe teorema e stabilitetit.

Punimi, gjithashtu, përmban një aplikim për ilustrim, ku homologjia persistente përdoret për të analizuar struktura topologjike në rrjetat funksionale të trurit, duke përfshirë të dhëna nga individë me çrregullim të spektrit të autizmit.

Kjo tezë ndahet në tetë kapituj, të organizuar në mënyrë që lexuesi të mund të ndjekë gradualisht zhvillimin e teorisë, nga bazat topologjike e deri te zbatimi i homologjisë persistente në të dhëna.

- **Kapitulli 2 – Komplekset:** Fillimisht, prezantohen komplekset e simplekseve, si ndërtimet themelore që mundësojnë kalimin nga hapësirat e të dhënave diskrete në objektet topologjike. Pastaj trajtohen komplekset e qelizave, të cilat ofrojnë fleksibilitet më të madh në ndërtimin e hapësirave topologjike më të përgjithshme.
- **Kapitulli 3 – Homologjia simplekse:** Në këtë pjesë zhvillohet teoria e homologjisë për komplekset e simplekseve, duke ndërtuar zinxhirët e simplekseve, si kombinime lineare të simplekseve, operatorët e kufirit ∂ , ciklet dhe kufijtë. Përkufizohet grupi i homologjisë:

$$H_k = \frac{\ker(\partial_k)}{\text{Im}(\partial_{k+1})}$$

ku $\ker(\partial_k)$ janë ciklet dhe $\text{Im}(\partial_{k+1})$ kufijtë. Këto grupe masin “vrimat” k -dimensionale në hapësirë. Jepen shembuj konkretë të homologjisë për grafe dhe sipërfaqe, si dhe mënyra e llogaritjes.

- **Kapitulli 4 – Homologjia singulare:** Pasi është trajtuar homologjia simplekse, kapitulli i katërt zgjeron qasjen teorike përmes homologjisë singulare, e cila është më e përgjithshme dhe e aplikueshme në çdo hapësirë topologjike, pa u kufizuar në ndërtimet e simplekseve. Prezantohet përkufizimi formal i homologjisë singulare përmes zinxhirëve singularë dhe analizohen koncepte themelore, si: invarianca homotopike, vargjet ekzakte dhe teorema Mayer–Vietoris-it. Gjithashtu, diskutohet ekuivalenca mes homologjisë simplekse dhe asaj singulare.
- **Kapitulli 5 – Homologjia persistente:** Ky është kapitulli qendror i temës, ku ndërtohen filtrimet, një varg nënkomplesesh:

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$$

Me analizimin e homologjisë në çdo hap të filtrimit, vëzhgohen lindja dhe zhdukja e

veçorive topologjike, të cilat më pas vizualizohen përmes diagrameve të persistencës dhe barkodeve.

- **Kapitulli 6 – Konstruktimi i komplekseve të simplekseve:** Ky kapitull fokusohet në ndërtimin praktik të komplekseve të simplekseve nga të dhëna diskrete, të cilat zakonisht paraqiten si bashkësi pikash në një hapësirë metrike. Në praktikë, objektet që duam të analizojmë rrallë paraqiten si komplekse, ndaj është e nevojshme të ndërtojmë komplekse që pasqyrojnë sa më mirë strukturën topologjike të të dhënave. Prezantohen komplekset Rips dhe të Čechut, ndërtimi i të cilave shërben si bazë për krijimin e filtrimeve që përdoren në homologjinë persistente.
- **Kapitulli 7 – Stabiliteti:** Diskutohet një nga rezultatet teorike më themelore, Teorema e Stabilitetit, e cila siguron që ndryshime të vogla në të dhënat fillestare shkaktojnë vetëm devijime të vogla në diagramet e persistencës, ku diagramet e persistencës mbeten të ngjashme dhe të qëndrueshme.

Më saktësisht, nëse f dhe g përfaqësojnë dy funksione që përshkruajnë të dhënat dhe d_B është distanca bottleneck ndërmjet diagrameve të tyre të persistencës $D(f)$ dhe $D(g)$, atëherë vlen jobarazimi:

$$d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Kjo siguron besueshmëri në analizë, një fakt kyç për aplikime reale. Në këtë kapitull përmenden gjithashtu modulet e persistencës dhe strukturat algjebrike që ndihmojnë në organizimin e informacionit topologjik në të dhëna.

- **Kapitulli 8 – Autizmi përmes homologjisë persistente:** Në kapitullin e fundit, homologjia persistente aplikohet në rrjetat neuronale të trurit tek individët me autizëm, për të zbuluar ndryshime strukturore mes trurit të individëve neurotipikë dhe atyre me çrregullime të spektrit të autizmit. Analiza mbështetet në të dhëna publike duke përdorur mjete softuerike, si Ripser, GUDHI dhe Python, për llogaritje.

Kapitulli 2

Komplekset

Hapësirat topologjike shpesh janë të ndërlikuara dhe të vështira për t'u kuptuar drejtpërdrejt. Por, matematika na ofron një mënyrë elegante për t'iu qasur: përmes ndarjes në pjesë më të vogla e të thjeshta. Komplekset të ndërtuara nga simplekset apo qeliza shërbejnë si një urë lidhëse mes abstraksionit matematikor dhe analizës konkrete.

Duke ndërtuar një hapësirë nga këto copëza të thjeshta ne mund ta analizojmë atë më lehtë, pa humbur informacion. Në këtë mënyrë, komplekset nuk janë vetëm mjete teknike për llogaritje, por shërbejnë për të kuptuar strukturën e një hapësire.

Përmbajtja e këtij kapitulli bazohet në masë të konsiderueshme në shënimet e M. Lackenby [12] dhe në librin e H.Edelsbrunner dhe të J.Harer [5].

2.1 Komplekset e simplekseve

Përkufizim 2.1.1. Për $n \in \mathbb{N}$, n -simpleksi standard është bashkësia:

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ dhe } \sum_i x_i = 1\}$$

Numri jonegativ n është dimension i simpleksit. Vërejmë se ekzistojnë përfshirje mes simplekseve të dimensioneve të ndryshme:

$$\Delta^0 \subset \Delta^1 \subset \Delta^2 \subset \dots$$

Simplekset standarde kanë paraqitje të ndryshme varësisht nga dimension i: pika (0-simpleksi standard), segmenti (1-simpleksi standard), trekëndëshi dhe brendia e tij (2-

simpleksi standard) dhe tetraedri (3-simpleksi standard). Këto janë paraqitur vizualisht në figurën 2.1.

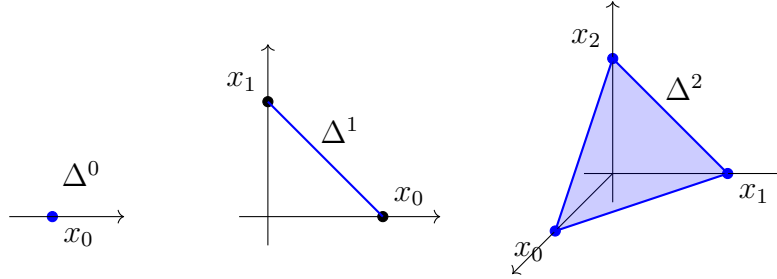


Figura 2.1: Simplekset standarde të dimensioneve 0, 1 dhe 2.

Kulmet e simpleksit, të shënuara me $V(\Delta^n)$, janë ato pika ku një nga koordinatat është 1 dhe të gjitha të tjerat janë 0, pra:

$$V(\Delta^n) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n \mid \exists i : x_i = 1 \text{ dhe } x_j = 0, \forall j \neq i\}.$$

Për çdo nënbashkësi joboshe A të $\{0, \dots, n\}$ ekziston një faqe përkatëse e Δ^n , e cila përkufizohet si:

$$\Delta^A := \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n : x_i = 0, \forall i \notin A\}.$$

Ky është një $(|A| - 1)$ -simpleks. Nëse $|A| = n$, atëherë kjo faqe quhet faqe maksimale.

Shembull 2.1.2. Në një 2-simpleks standard $\Delta^2 \{x_0, x_1, x_2\}$ kemi se:

- Faqet janë të gjitha nënbashkësitë joboshe të simpleksit $\{x_0, x_1, x_2\}$ që përfaqësojnë simplekse të dimensioneve më të ulëta. Kështu, pikat $\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}$ (0-simplekset) dhe brinjët $\{x_0, x_1\}, \{x_0, x_2\}, \{x_1, x_2\}$ (1-simplekset) janë të gjitha faqet të 2-simpleksit.
- Faqet maksimale janë faqet me dimensionin 1, pra segmentet.

Kulmet e simpleksit formojnë një bazë për hapësirën \mathbb{R}^{n+1} , prandaj çdo funksion $f : V(\Delta^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ zgjerohet në mënyrë unike në një pasqyrim linear $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ pra çdo funksion i përcaktuar mbi kulmet mund të zgjerohet në një funksion linear në të gjithë hapësirën. Ngushtimi $f : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ quhet pasqyrim afin.

Përkufizim 2.1.3. Një përfshirje e faqes së një n -simpleksi standard në një m -simpleks standard ($n < m$) është pasqyrim afin i një injeksioni $V(\Delta^n) \rightarrow V(\Delta^m)$.

Për shembull, në rastin kur $n = 1$ dhe $m = 2$ kemi përfshirjet e një 1-simpleksi (Δ_1 i cili është një segment me dy kulme) në një 2-simpleks (Δ_2 i cili është një trekëndësh me tri kulme). Këto përfshirje korrespondojnë me gjashtë mënyra të zgjedhjes së dy kulmeve nga tri, pra me gjashtë injeksionet e mundshme $\{x_0, x_1\} \hookrightarrow \{x_0, x_1, x_2\}$.

Përkufizim 2.1.4. *Një kompleks i simplekseve abstrakte është çifti (V, Σ) ku V është bashkësi (elementet e së cilës i quajmë kulme) dhe Σ është bashkësia e nënbashkësive të fundme joboshe të V (që quhen simplekse) ashtu që:*

- (i) për çdo $v \in V$, bashkësia njëelementëshe $\{v\}$ është në Σ ;
- (ii) nëse σ është një element i Σ atëherë çdo nënbashkësi joboshe e σ i përket gjithashtu Σ .

Kompleksi (V, Σ) quhet i fundmë nëse V është një bashkësi e fundme.

Shembull 2.1.5. Le të jetë hapësira $V = \{x_0, x_1, x_2\}$ dhe $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$.

Shembuj të komplekseve të simplekseve janë:

- $\Sigma = \{\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}\}$.
- $\Sigma = \{\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$.

Ndërsa nuk janë komplekse të simplekseve:

- $\Sigma = \{\{x_1\}, \{x_2\}\}$ nuk është kompleks i simplekseve pasi mungon bashkësia njëelementëshe $\{x_0\}$;
- $\Sigma = \{\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_0, x_1, x_2\}\}$ nuk është kompleks i simplekseve pasi përmban $\{x_0, x_1, x_2\}$, por jo nënbashkësitë e saj $\{x_0, x_1\}, \{x_0, x_2\}, \{x_1, x_2\}$.

Në figurën 2.2 kemi, në rastin e parë, të bëjmë me kompleks të simplekseve, ndërsa dy të tjerat nuk paraqesin kompleks të simplekseve.

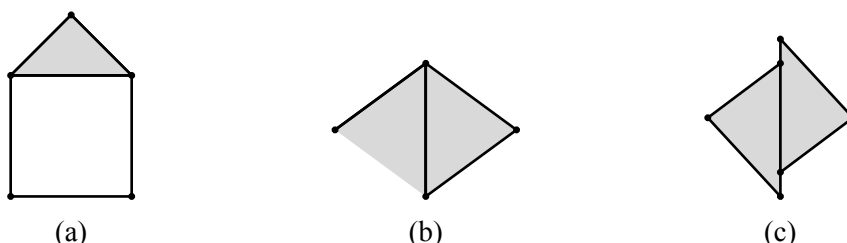


Figura 2.2: Koleksion i simplekseve ku (a) është një kompleks i simplekseve, ndërsa (b) dhe (c) nuk janë të tilla: në (b) mungon një brinjë që duhej të ishte pjesë e kompleksit dhe në (c) dy trekëndësha takohen përgjatë një brinje që nuk është brinjë e asnjërit prej tyre.

Tani, në vazhdim do të përshkruajmë një metodë për të ndërtuar hapësira topologjike.

Përkufizim 2.1.6. Realizimi gjeometrik $|K|$ i një kompleksi të simplekseve abstrakte $K = (V, \Sigma)$ ndërtohet si në vazhdim:

- (i) Për çdo $\sigma \in \Sigma$ marrim një kopje të $(n+1)$ -simpleksit standard, ku $n+2$ është numri i elementeve në σ . Këtë e shënojmë me Δ_σ .
- (ii) Nëse $\sigma \subset \tau$, $\sigma, \tau \in \Sigma$ atëherë e indentifikojmë Δ_σ si një nënbashkësi e Δ_τ , përmes përfshirjes së faqes që dërgon elementet e σ tek elementet përkatëse të τ .

Shembull 2.1.7. Le të jetë $V = \{x_0, x_1, x_2\}$ dhe Σ bashkësia e mëposhtme:

$$\Sigma = \{\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_0, x_1\}, \{x_0, x_2\}, \{x_1, x_2\}\}.$$

Për të ndërtuar realizimin gjeometrik $|K|$ të kompleksit (V, Σ) , ndjekim hapat në vazhdim: Fillojmë me tri 0-simplekse, që përfaqësojnë kulmet $\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}$. Pastaj shtojmë tri 1-simplekse, që përfaqësojnë segmentet $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_0\}$.

Identifikojmë 0-simplekset e përbashkëta, kemi që kulmi $\{x_0\}$ ndodhet në $\{x_0, x_1\}$ dhe $\{x_0, x_2\}$ andaj i bashkojmë (ngjisim) këto simplekse. Në këtë mënyrë veprojmë dhe për dy 0-simplekset e tjera.

Struktura e ndërtuar është paraqitur në figurën 2.3 dhe përmban vetëm brinjët e trekëndëshit (pa brendinë e tij pasi $\{x_0, x_1, x_2\} \notin \Sigma$).

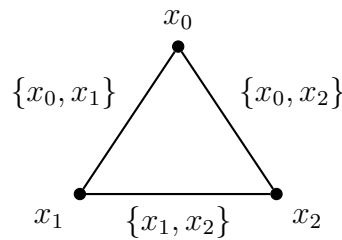


Figura 2.3: Realizimi gjeometrik $|K|$ i kompleksit të simplekseve (V, K) .

Ndërsa në vazhdim kemi realizimin gjeometrik të bashkësive simplekse. Nënbashkësive njëelementëshe të V u korrespondon pika:

$$\{x_0 \mid x_0 = 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Nënbashkësive dyelementëshe të V u korrespondojnë segmentet e mbyllura:

$$\{(x_0, x_1) \mid x_0 + x_1 = 1 \wedge 0 \leq x_0, x_1 \leq 1\}.$$

Nënbashkësive trielementëshe të V u korrespondojnë sipërfaqe trekëndëshe:

$$\{(x_0, x_1, x_2) \mid x_0 + x_1 + x_2 = 1 \wedge 0 \leq x_0, x_1, x_2 \leq 1\}.$$

Nënbashkësive n -elementëshe të V u korrespondojnë:

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} = 1 \wedge 0 \leq x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \leq 1\}.$$

Përkufizim 2.1.8. *Trekëndëshëzimi (triangulimi) i një hapësire X është kompleksi i simplekseve K me homomorfizmin $\varphi : |K| \rightarrow X$.*

Shembull 2.1.9. Torusi $S^1 \times S^1$ është trianguluar duke përdorur nëntë kulme, siç shihet në figurën 2.4. Për ta bërë figurën e mesme më të qartë, janë larguar brinjët në diagonale që shfaqen në figurë e majtë. Figura e parë njëkohësisht paraqet dhe kompleksin e simplekseve të torusit.

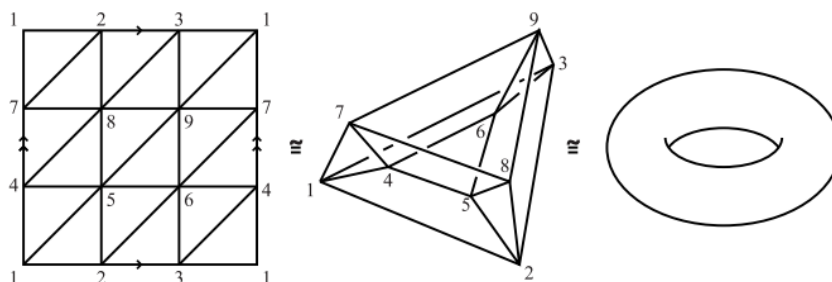


Figura 2.4: Triangulimi i torusit.

Përkufizim 2.1.10. *Nëse (V, Σ) është kompleks simpleksesh atëherë (V', Σ') është nënkompleks simpleksesh në qoftë se $V' \subseteq V$, $\Sigma' \subseteq \Sigma$ dhe (V', Σ') është kompleks i simplekseve.*

Përkufizim 2.1.11. *Një pasqyrim simpleksesh ndërmjet (V_1, Σ_1) dhe (V_2, Σ_2) është pasqyrimi $f : V_1 \rightarrow V_2$ ashtu që për çdo $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\exists \sigma_2 \in \Sigma_2$ e tillë që $f(\sigma_1) = \sigma_2$. Pasqyrimi f quhet izomorfizëm simpleksesh, nëse ka inverz simpleksesh.*

Shembull 2.1.12. Le të kemi dy komplekse të simplekse (V_1, Σ_1) dhe (V_2, Σ_2) , ku:

$$V_1 = \{x_0, x_1, x_2\}, \quad \Sigma_1 = \{\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_0, x_1\}\}$$

dhe

$$V_2 = \{x_0, x_1, x_2\}, \quad \Sigma_2 = \{\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}.$$

Funksioni $f : V_1 \rightarrow V_2$ i përcaktuar në këtë mënyrë:

$$f(x_0) = x_1, \quad f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_0.$$

është pasqyrim i simplekseve të dhëna. Për më tepër funksioni f është një izomorfizëm simpleksesh, sepse ai ka një inverz simpleksesh.

Tani le të shqyrtojmë funksionin $g : V_1 \rightarrow V_2$ të përcaktuar si:

$$g(x_0) = x_0, \quad g(x_1) = x_1, \quad g(x_2) = x_2.$$

Edhe pse g paraqet bijeksion mes kulmeve, ai nuk është isomorfizëm simpleksesh, sepse $g(\{x_0, x_1\}) = \{x_0, x_1\}$, ndërsa $\{x_0, x_1\}$ ndodhet në Σ_1 por nuk ndodhet në Σ_2 .

Një pasqyrim simpleksesh f mes komplekseve të simplekseve abstrakte K_1 dhe K_2 indukon një pasqyrim të vazhdueshëm $|f| : |K_1| \rightarrow |K_2|$ ku $K_1 = (V_1, \Sigma_1)$, $K_2 = (V_2, \Sigma_2)$. Ky pasqyrim është dhënë në vazhdim.

Fillimisht $|f|$ përcaktohet mbi $V(|K_1|)$ duke ndjekur rregullin e përcaktuar nga f dhe më pas zgjerohet mbi çdo simpleks duke përdorur pasqyrimin afín unik.

Kur kemi të bëjmë me komplekse të simplekseve të fundme, pasqyrimi përcaktohet vetëm duke ditur se ku shkojnë kulmet. Pasi përcaktohen imazhet e kulmeve, pasqyrimi për të gjithë kompleksin përcaktohet automatikisht.

Shpesh nuk merremi me një triangulim të saktë të një hapësire, por mund të ndryshojmë kompleksin e simplekseve në bazë. Një nga mënyrat për të ndryshuar një kompleks të simplekseve është duke e “ndarë në pjesë më të vogla”. Ky proces na lejon të punojmë me komplekse më të thjeshta ose më të përshtatshme.

Përkufizim 2.1.13. *Një ndarje e kompleksit K është kompleksi K' bashkë me një homomorfizëm $h : |K'| \rightarrow |K|$ i tillë që për çdo simpleks $\sigma' \in K'$, $h(\sigma')$ përmban plotësisht një simpleks të K dhe ngushtimi i h në σ' është afín.*

Shembull 2.1.14. Le të jetë K triangulimi i $I \times I$ i paraqitur në diagramin e majtë të figurës 2.5. Për çdo numër të plotë pozitiv r le të jetë K' triangulimi i $I \times I$ i përfutur duke ndarë $I \times I$ në një rrjet prej r^2 katrorësh kongruentë dhe më pas duke ndarë secilin prej tyre sipas diagonales që shkon nga poshtë-djathtas në lart-majtas siç është në figurën 2.5. Atëherë, K' është një ndarje e K . Ne e shënojmë këtë ndarje si $(I \times I)_{(r)}$.

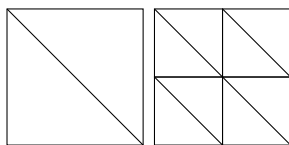


Figura 2.5: Shembull i një ndarjeje të kompleksit K .

2.2 Orientimi

Në këtë pjesë do të shqyrtojmë rolin e orientimit në triangulimin e sipërfaqeve dhe se si ky orientim reflekton dallime topologjike mes dy objekteve që janë homotopikisht ekuivalente, por jo homeomorfe: cilindri dhe shiriti i Mobius-it.

Cilindri mund të triangulohet duke filluar nga një drejtkëndësh i ndarë në katrorë e më pas në trekëndësha të vegjël, ku brinjët vertikale ngjiten pa rrotullim, shih figurën 2.6. Në këtë rast është e mundur të zgjedhim një orientim koherent për çdo 2–simpleks, në mënyrë që kompleksi të jetë i orientueshëm. Kjo do të thotë që mund të caktojmë një renditje të vrimave për çdo trekëndësh të tillë që është në përputhje me fqinjët e tij. Pra, triangulimi i cilindrit reflekton orientimin e tij.

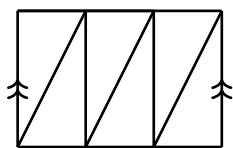


Figura 2.6: Kompleksi i simplekseve të cilindrit

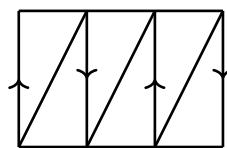


Figura 2.7: Kompleksi i shiritit të Mobius-it

Ndërsa, te shiriti i Mobius-it duhet që t'i ngjisim brinjët me një rrotullim prej 180 shkallësh, shih figurën 2.7. Kur tentojmë të triangulojmë këtë sipërfaqe me simplekse, ndonjë trekëndësh i orientuar në njëren anë të shiritit do të përfundojë i lidhur me një trekëndësh që ka orientimin e kundërt pas kalimit përgjatë shiritit. Ky fakt bën të pamundur që të caktohet një orientim për të gjitha komplekset e simplekseve në mënyrë që fqinjët të kenë orientime të njëjta. Andaj triangulimi i shiritit të Mobius-it nuk është i orientueshëm, gjë që reflekton dhe faktin se kjo sipërfaqe është e paorientuar.

Edhe pse cilindri dhe shiriti i Mobius-it janë homotopikisht ekuivalentë, të dy deformohen në rrethin S^1 , mirëpo ata nuk janë homeomorfë dhe nuk mund të kenë triangulime të krahasueshme nga ana e orientimit. Kjo diferencë bëhet e dukshme pikërisht kur analizojmë triangulimet:

- Në cilindër çdo trekëndësh mund të orientohet në mënyrë koherente me të tjerët.

- Në shiritin e Mobius-it një orientim i tillë është i pamundur për të gjithë triangulimin.

Për të kuptuar më mirë orientimin e hapësirave duhet të përcaktojmë fillimisht orientimin e simplekseve. Orientimi i simplekseve do të luajë një rol të rëndësishëm më vonë në llogaritjen e homologjisë.

Deri tani një simpleks është dhënë si një bashkësi e kulmeve të tij. Një simpleks i orientuar është një simpleks me një zgjedhje të orientimit. Në rastin e një brinje që është një 1-simpleks, orientimi përcaktohet nga zgjedhja e renditjes mes dy kulmeve, për shembull $\{x_0, x_1\}$ ose $\{x_1, x_0\}$, ku këto dy renditje janë të kundërta me njëra-tjetrën.

Vini re: Në bashkësi renditja e elementeve nuk ka rëndësi, por këtu, përkundër shënimit me kllapa që përdorim zakonisht për bashkësi, renditja e kulmeve luan rol dhe përcakton orientimin e simpleksit.

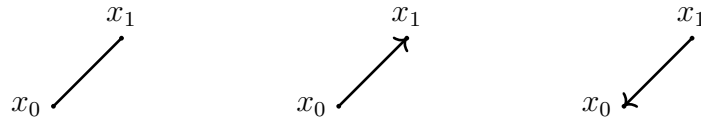


Figura 2.8: Orientimi i brinjëve $\{x_0, x_1\}$ dhe $\{x_1, x_0\}$

Për një 2-simpleks që është një trekëndësh, orientimi përcaktohet nga një renditje e kulmeve, si $\{x_0, x_1, x_2\}$, e cila mund të interpretohet gjeometrikisht përmes një vektori normal që tregon drejtimin e sipërfaqes.

Në figurën 2.9 është paraqitur trekëndëshi $\{x_0, x_1, x_2\}$ (majtas) dhe trekëndëshat e orientuar $\{x_0, x_1, x_2\} = \{x_1, x_2, x_0\} = \{x_2, x_0, x_1\}$ (në qendër) dhe $\{x_1, x_0, x_2\} = \{x_0, x_2, x_1\} = \{x_2, x_1, x_0\}$ (djathtas).

Në dimensione më të larta një n-simpleks orientohet duke vendosur një rend mbi kulmet e tij, duke zgjedhur kështu një drejtim të caktuar.

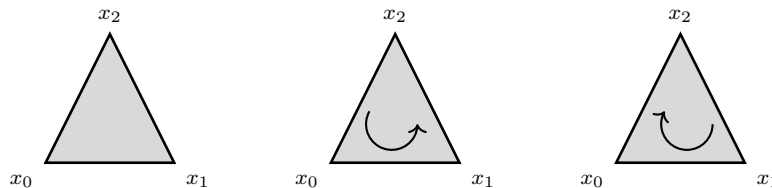


Figura 2.9: Orientimi i 2–simpleksit $\{x_0, x_1, x_2\}$

Përkufizim 2.2.1. Një simpleks i orientuar me kulmet x_0, x_1, \dots, x_k është një $(k + 1)$ -varg i renditur $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Për një permutim π të bashkësisë $\{0, 1, \dots, k\}$, identifikojmë:

$$\sigma = (-1)^{\text{sgn}(\pi)} \{v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}\},$$

ku $\text{sgn}(\pi)$ është shenja e permutimit π , pra shenja është 1 nëse π është çift dhe -1 nëse është tek.

Një 0–simpleks x , po ashtu, mund të orientohet në dy mënyra: $\{v\}$ dhe $-\{v\}$.

Disa veti që rrjedhin nga përkufizimi janë listuar në vijim:

- Çdo simpleks me kulmet x_0, x_1, \dots, x_k mund të orientohet në dy mënyra të ndryshme: $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ dhe $-\sigma$. Një simpleks i orientuar ka shenjë $+$ ose $-$ të vendosur përpara.
- Ndërrimi i dy kulmeve në një simpleks të orientuar τ e ndryshon orientimin e tij duke ndryshuar shenjën që i paraprin.

Një veti e rëndësishme e një simpleksi të orientuar është se ai indukon një orientim në secilën nga faqet maksimale të tij.

Përkufizim 2.2.2. Nëse $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ është një simpleks i orientuar dhe $p \in \{0, 1, \dots, k\}$. Atëherë orientimi i induktuar në faqet maksimale të σ , është:

$$(-1)^p \{x_0, x_1, \dots, \hat{x}_p, \dots, x_k\}.$$

Segmenti i orientuar $\{x_0, x_1\}$ indukon orientimet $\{x_1\}$ dhe $-\{x_0\}$ në faqet maksimale të tij (kulmet). Trekëndëshi i orientuar $\{x_0, x_1, x_2\}$ indukon orientimet $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_1\}$ dhe $\{x_0, x_1\}$ në faqet maksimale të tij (brinjët), shih figurën 2.10. Vërejmë se brinjët janë orientuar sipas drejtimit të shigjetës rrethore që tregon orientimin e trekëndëshit.

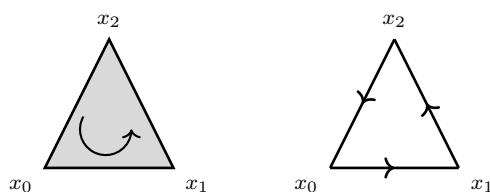


Figura 2.10: Orientimi i 2–simpleksit $\{x_0, x_1, x_2\}$

Tani që kemi vendosur një mënyrë për të orientuar një simpleks, do të shqyrtojmë orientimi e të gjithë sipërfaqes.

Përkufizim 2.2.3. Nëse simplekset e orientuara σ dhe σ' kanë një brinjë të përbashkët, atëherë ato janë të orientuara në mënyrë kompatible, nëse ato indukojnë orientime të kundërta në brinjën e përbashkët.

Një shembull i orientimit kompatibil është dhënë në figurën 2.11. Vërejmë se orientimet e trekëndëshave përputhen (të dyja shigjetat rrethore janë të drejtuara në drejtim të kundërt me akrepat e orës), gjë që implikon që orientimet e induktuara në brinjën e përbashkët janë të kundërta me njëra-tjetrën.

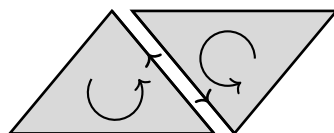


Figura 2.11: Orientimi i simplekseve në mënyrë kompatible.

Rikujtojmë se një shumëfaqësh i dimensionit n është një hapësirë topologjike në të cilën çdo pikë ka një rrethinë që është homeomorfe me \mathbb{R}^n . Një shumëfaqësh i tillë i dimensionit 2, quhet sipërfaqe.

Përkufizim 2.2.4. *Le të jetë K një triangulim i sipërfaqes $|K|$. Themi se $|K|$ është e orientuar, nëse të gjithë trekëndëshat e K janë të orientuar (si simplekse), në mënyrë që të vlejë: çdo çift trekëndëshash të orientuar që kanë një brinjë të përbashkët janë të orientuar në mënyrë kompatible.*

Një sipërfaqe quhet e orientueshme nëse mund të orientohet.

Orientueshmëria e një sipërfaqeje nuk varet nga triangulimi, por vetëm nga vetitë e saj topologjike. Në vashdim kemi dy shembuj që shpjegojnë idenë gjeometrike që qëndron pas kësaj.

Shembull 2.2.5. Cilindri $S^1 \times [0, 1]$ është i orientueshëm, shih figurën 2.12. Simplekset e orientuara indukojnë orientim të kundërt në të gjitha brinjët përfshirë brinjën $\{x_0, x_1\}$, përgjatë së cilës ndodh ngjitja.

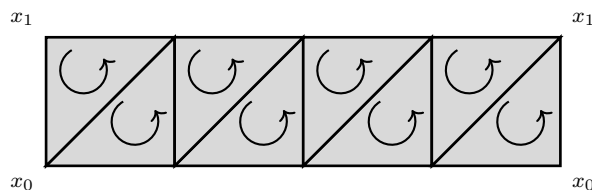


Figura 2.12: Triangulimi i Cilindrit.

Ndërsa, shiriti i Mobius-it nuk është i orientueshëm, shih figurën 2.13. Supozojmë se duam të orientojmë një triangulim të shiritit të Mobius-it. Fillojmë duke zgjedhur një orientim për një trekëndësh (në skajin më të majtë) dhe më pas i orientojmë trekëndëshat

fqinjë në mënyrë kompatible, një nga një. Në fund (në skajin më të djathtë), kemi kundërshtim në orientim: trekëndëshi i fundit (me ngjyrë të theksuar) kërkon një orientim që bie ndesh me orientimet e mëparshme. Kjo tregon se nuk ekziston asnjë mënyrë që t'i orientojmë në mënyrë kompatible të gjithë trekëndëshat në këtë triangulum.

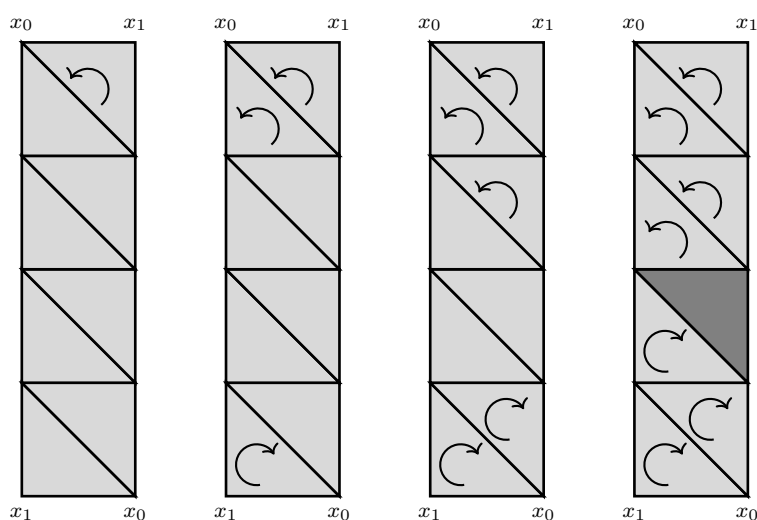


Figura 2.13: Triangulimi i shiritit të Möbius-it.

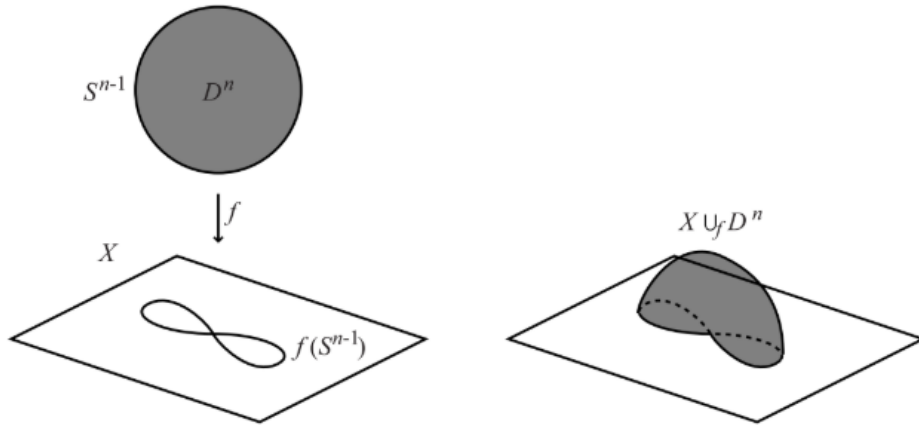
2.3 Komplexet e qelizave

Për të kuptuar dhe për të ndërtuar hapësirat topologjike është thelbësore të kemi struktura që jo vetëm përshkruajnë këto hapësira, por edhe e bëjnë procesin sa më të thjesht dhe efikas. Nga praktika e dimë se paraqitja e shumicës së hapësirave topologjike përmes komplekseve të simplekseve kërkon një numër shumë të madh simplekseve edhe për hapësira të thjeshta si torusi. Kjo e bën procesin më të ndërlikuar. Megjithëse komplekset e simplekseve janë një mjet i dobishëm, përdorimi i tyre paraqet kufizime. Për ta thjeshtuar këtë proces prezantojmë komplekset qelizore, një përgjithësim praktik që ofron një mënyrë më efikase dhe të thjesht për të ndërtuar hapësira topologjike. Këto struktura përdorin më pak elemente, duke ruajtur qartësinë dhe informacionin thelbësor të hapësirave.

Përkufizim 2.3.1. *Sfera n -dimensionale S^n është bashkësia*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

Përkufizim 2.3.2. Le të jetë X hapësirë dhe $f : S^{n-1} \rightarrow X$ pasqyrim. Hapësira e cila fitohet duke e “ngjitur” një n -qelizë në X përmes funksionit f përkufizohet si herës i unionit disjunkt $X \sqcup D^n$ ashtu që për çdo pikë $x \in X$, $f^{-1}(x)$ dhe x indentifikohen. Shënojmë me $X \sqcup_f D^n$.



Përkufizim 2.3.3. Një kompleks (i fundmë) i qelizave për hapësirën X është dekompozimi

$$K^0 \subset K^1 \subset K^2 \subset \dots \subset K^n = X$$

ku:

- (i) K^0 është bashkësi e fundme pikash,
- (ii) K^i fitohet nga K^{i-1} duke “ngjitur” një numër të fundmë i -qelizave.

Shembull 2.3.4. i) Një graf i fundmë është kompleks i qelizash, i cili përbëhet vetëm prej 0-qelizave dhe 1-qelizave.

- ii) çdo kompleks i fundmë i simplekseve është kompleks qelizave, ku çdo n -simpleks është n -qelizë.

Shembull 2.3.5. Një nga dallimet më të dukshme mes komplekseve të qelizave dhe atyre të simplekseve është numri i elementeve që nevojiten për të përshkruar të njëjtin objekt topologjik. Komplekset e simplekseve për shkak të natyrës së tyre rigoroze dhe kërkesave për triangulim, zakonisht përmbajnë shumë më shumë simplekse sesa komplekset e qelizave që kanë qeliza. Do të paraqesim strukturat qelizore për sipërfaqet si torusi, cilindri, shiritit i Mobius-it dhe sfera, si dhe dallimet e tyre me komplekset e simplekseve.

- i) Struktura qelizore e torusit ndërtohet duke u nisur nga një 0-qelizë v , e cila është një pikë. Më pas ngjiten dyja 1-qeliza (lakore) që i shënojmë me a dhe b , ku secila bashkohet në të dy skajet me pikën v , pra skajet e tyre identifikohen me v . Në fund ngjitet një 2-qelizë T , e cila ngjitet sipas relacionit $aba^{-1}b^{-1}$, siç është paraqitur dhe në figurën 2.14. Kjo ndarje përbëhet vetëm nga një 0-qelizë, dy 1-qeliza dhe një 2-qelizë, pra është shumë e thjeshtë.

Ndërkohë siç kemi parë më herët në shembullin 2.1.9 kompleksi i simplekseve për torusin përbëhet nga 18 trekëndësha, shumë më tepër pika dhe brinjë duke e bërë strukturën më të ndërlikuar.

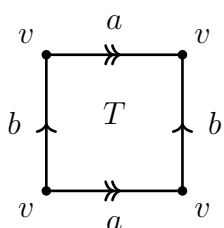


Figura 2.14: Struktura e qelizave të torusit.

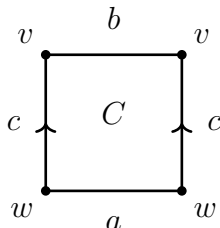


Figura 2.15: Struktura e qelizave të cilindrit.

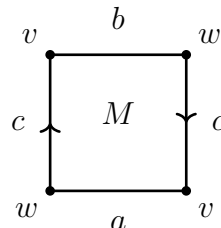


Figura 2.16: Shiritit i Mobius-it

- ii) Struktura qelizore e cilindrit përbëhet nga dy 0-qeliza v dhe w . Më pas ngjiten tri 1-qelizat (lakore) a , b dhe c , që lidhin këto dy pika. Përfundimisht ngjitet një 2-qelizë C , që përfaqëson sipërfaqen e cilindrit. Një strukturë e tillë është dhënë në figurën 2.15

Ndërsa siç kemi parë më herët në figurën 2.6 kompleksi i simplekseve për cilindrin përbëhet nga katër trekëndësha dhe brinjët e kulmet përkatëse.

- iii) Struktura qelizore e shiritit të Mobius-it është e ngjashme me atë të cilindrit, por ndryshon në orientimin e 1-qelizës c . Për shkak të këtij ndryshimi, kulmet ndërrojnë vendet dhe kështu ndryshon edhe mënyra se si ngjitet 2-qeliza. Një strukturë e tillë është paraqitur në figurën 2.16.

Ndërsa struktura e komplekseve të simplekseve për shiritin e Mobiusit është dhënë në figurën 2.7 dhe përbëhet nga gjashtë trekëndësha, së bashku me brinjët dhe kulmet përkatëse.

- iv) Struktura e kompleksit të qelizave për sferën S^2 përbëhet nga një 0-qelizë dhe një 2-qelizë. Pra, me ngjitjen e tyre fitojmë sferën S^2 . Ndërsa struktura e kompleksit të

simplekseve për sferën është shumë më e ndërlikuar dhe përbëhet nga më shumë elemente. Struktura e komplekseve të simplekseve përbëhet nga bashkësia $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ dhe bashkësia e nënbashkësive:

$$\begin{aligned} \Sigma = \{ & \{x_0, x_1, x_2\}, \{x_0, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3, x_2\}, \{x_0, x_3, x_1\}, \\ & \{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_0\}, \{x_0, x_3\}, \{x_3, x_2\}, \{x_3, x_1\}, \\ & \{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\} \} \end{aligned}$$

Pra, dyshja (V, Σ) paraqet kompleksin e simplekseve të sferës, i cili është paraqitur edhe në figurën 2.17.

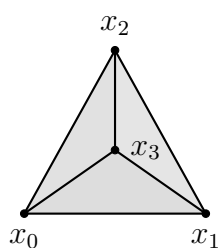


Figura 2.17: Kompleksi i simplekseve të sferës.

Kapitulli 3

Homologjia simplekse

Një nga pytjet themelore në topologji është: *Kur janë dy hapësira topologjike të njëjta?* Pra, kur mund të “shndërrohen” njëra në tjetrën pa prishur strukturën e tyre. Një nga mënyrat që përdoret për ta kuptuar këtë është grupi fundamental.

Nëse dy hapësira janë të njëjta në këtë kuptim quhet homeomorfe, atëherë grupet e tyre fundamentale janë gjithashtu të njëjta. Por ndodh që dy hapësira të kenë grupe fundamentale të njëjta, por të mos jenë të njëjta si hapësira topologjike. Për shembull, sfera S^3 me dimension 3 dhe sfera S^4 , kanë të njëjtin grup fundamental, por s’janë hapësira të njëjta.

Për të zgjidhur këtë problem, do të prezantojmë homologjinë, e cila na jep më shumë informacion për formën e hapësirës dhe ndihmon t’i dallojmë hapësirat që grupi fundamental nuk i dallon.

Homologjia na mundëson të numërojmë vrimat në një hapësirë, këto vrima mund të jenë të dimensioneve të ndryshme. Ndërsa një vrimë në një objekt dy-dimensional mund të imagjinohet lehtë, kuptimi i një vrime katërdimensionale në një hapësirë shtatëdimensionale nuk është aq intuitiv.

Ideja themelore e homologjisë është të përkthejë problemet topologjike në objekte algjebrike, zakonisht grupe ose hapësira vektoriale që mund të analizohen dhe të krahasohen. Kjo lejon studimin e hapësirave komplekse përmes teknikave algjebrike, duke zbuluar tipare themelore të formave dhe të lidhjeve të tyre që mund të jenë të fshehura në një përshkrim topologjik të drejtpërdrejtë.

Përmbajtja e këtij kapitulli bazohet në masë të konsiderueshme në shënimet e P. Schnider et al. [17], librat e Ž. Virk [19] dhe H. Edelsbrunner me J. Harer [5], si dhe në artikujt e P. Nadathur [14] dhe punimin e diplomës së R. Garcia [6].

3.1 Një vështrim intuitiv mbi vrimat në topologji

Homologjia përdoret për të numëruar vrimat në objekte dhe ky numër është invariant i hapësirave topologjike deri në ekuivalencë të homotopisë.

Para se të kalojmë në përkufizime le të ndërtojmë një intuitë rreth vrimave në komplekset e simplekseve. Konsiderojmë dy komplekse të simplekseve K_1 dhe K_2 të paraqitura si figurën 3.1. Sa (dhe çfarë lloji) vrimash kanë këto komplekse?



Figura 3.1: Komplekset e simplekseve K_1 dhe K_2 .

Kompleksi K_1 përfaqëson kufirin e një tetraedri (skeleti i tetraedrit) dhe përbën një triangulum të një sferë të zbrazët dydimensionale. Për këtë arsye, mund të themi se ka një zgavër ose një “boshllëk”. Meqenëse ky boshllëk ka të njëjtën dimension si ai i sferës dydimensionale do të e quajmë një vrimë (boshllëk) dydimensionale.

Kompleksi K_2 mund të shihet si një triangulum i katër pikave në rrafsh, ku pika x_3 ndodhet brenda mbështjellësit konveks të tri pikave të tjera. Ky kompleks është homeomorf me një disk dydimensionale prandaj intuitivisht mund të themi se ai nuk ka ndonjë vrimë. Si të disku dydimensionale dhe K_2 ka një kufi të përbërë nga brinjët $\{x_0, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$ dhe $\{x_0, x_2\}$.

Ndërsa K_1 nuk ka kufi, ashtu si një sferë që nuk ka kufi. Më vonë do të japim një përkufizim të kufirit për komplekset e simplekseve.

Disa komplekse si K_1 do të kenë kufi bosh, në analogji me grafet pa gjethe, do t'i quajmë këto komplekse cikle. Me këtë këndvështrim vrimat d -dimensionale në një kompleks të simplekseve K duhet të jenë nënkomplekse të pastra d -dimensionale që janë cikle. Megjithatë jo çdo cikël duhet të jetë vrimë.

Kufiri i kompleksit K_2 është një cikël njëdimensional, sepse ai vetë nuk ka kufi. Sidoqoftë ne nuk duam ta konsiderojmë këtë cikël si një vrimë një-dimensionale të K_2 , sepse ai është “i mbushur” nga trekëndëshat që e rrethojnë. Andaj intuita jonë na thotë se vrimat janë nënkomplekse pa kufij - cikle, të cilat nuk janë vetë kufij të ndonjë nënkompleksi tjetër që do ta “mbushë” atë vrimë. Në vijim do ta formalizojmë këtë intuitë duke përcaktuar

llojet e nënkomplekseve që marrim në konsideratë, konceptin e kufijve dhe cikleve, si dhe mënyrën matematikore për të përshkruar ciklet që nuk janë kufij të diçkaje tjetër.

3.2 Zinxhirët

Në vazhdim le të jetë K një kompleks i simplekseve abstrakte me dimension n dhe \mathbb{F} fushë e koeficientëve. Zinxhirët janë shuma formale të simplekseve, ku secili simpleks ka një koeficient nga fusha \mathbb{F} .

Për çdo $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ le të jetë n_p numri i simplekseve me dimension p në K .

Përkufizim 3.2.1. Një p -zinxhir n është shuma formale $\sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \sigma_i^p$ ku $\lambda_i \in \mathbb{F}$ dhe σ_i^p është një p -simpleks i orientuar në K për secilën i .

Ky përkufizim merr parasysh edhe orientimin: nëse σ është një simpleks i orientuar atëherë $(-1) \cdot \sigma = -\sigma$ përfaqëson të njëjtin simpleks me orientim të kundërt.

Në këtë shumë formale thjesht i caktojmë një koeficient nga fusha \mathbb{F} secilit p -simpleks të K . Kjo është një shprehje formale që do të thotë se përdorim simbolet $+$ dhe \sum , por ky veprim nuk ka ndonjë domethënie matematikore përtej mënyrës sesi është shkruar. Nuk ka ndonjë formë tjetër për të përfaqësuar një zinxhir përveç shumës me të cilën ai është i përcaktuar.

Le të jenë $\{\sigma_1^p, \sigma_2^p, \dots, \sigma_{n_p}^p\}$ koleksioni i të gjitha p -simplekseve në K .

p -simplekset që mungojnë në p -zinxhirin kanë koeficientë 0. Duke përdorur veprimin e mbledhjes dhe të shumëzimit me skalar në fushën \mathbb{F} mund të mbledhim dhe shumëzojmë me skalar dy p -zinxhirë $c = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \sigma_i^p$ dhe $c' = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda'_i \sigma_i^p$ që të dy në K . Pasi zinxhirët janë thjesht shuma formale, atëherë kemi

$$\sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \sigma_i^p + \sum_{i=1}^{n_p} \lambda'_i \sigma_i^p = \sum_{i=1}^{n_p} (\lambda_i + \lambda'_i) \sigma_i^p \quad \forall \lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{F}.$$

$$k \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \sigma_i^p = \sum_{i=1}^{n_p} (k \lambda_i) \sigma_i^p \quad \forall k, \lambda_i \in \mathbb{F}.$$

Prandaj kemi një veprim të mbledhjes dhe shumëzimit me skalar në bashkësinë $C_p(K)$ të të gjithë p -zinxhirëve në K . Andaj mund të marrim pohim në vazhdim.

Pohim 3.2.2. Grupi i p -zinxhirëve $(C_p(K; \mathbb{F}), +)$ është një hapësirë vektoriale mbi fushën \mathbb{F} .

Vërejtje 3.2.3. Zinxhirët C_p në thelb janë grupe abeliane, por kur përkufizohen mbi një fushë, ato marrin gjithashtu strukturën e hapësirave vektoriale. Në këtë pjesë kemi ndjekur pikërisht këtë qasje, pasi përdorimi i fushave na mundëson të shfrytëzojmë strukturën lineare të hapësirave vektoriale, e cila është thelbësore për ndërtimin e homologjisë persistente, që përbën qëllimin kryesor të kësaj teze. Nëse në vend të fushave përdorim unaza, atëherë C_p nuk kanë më strukturën e hapësirës vektoriale dhe mbeten thjesht grupe abeliane. Më vonë, në Seksionin 4.8, C_p do t'i shohim si grupe abeliane, pasi aty do të punojmë mbi unazën \mathbb{Z} . Kjo vërejtje bëhet për të shmangur çdo konfuzion që mund të lindë nga ndryshimi në mënyrën e trajtimit të bashkësisë së zinxhirëve.

Vërejtje 3.2.4. Në vijim, mund të hasim përdorimi e termit “grup” edhe kur flasim për hapësira vektoriale. Termi “grup” përdoret këtu për të përshkruar strukturën algjebrike të zinxhirëve, pavarësisht nëse kemi të bëjmë me një grup abelian apo një hapësirë vektoriale mbi një fushë. Ky emërtim vjen nga emërtimi klasik, kur koeficientët merren në një unazë (zakonisht në \mathbb{Z}) dhe zinxhirët që rezultojnë formojnë një grup abelian. Në rastin kur përdoret një fushë, ato marrin strukturën e një hapësire vektoriale, por emri “grup zinxhirësh” vazhdon të përdoret për të ruajtur shënimin klasik në literaturë.

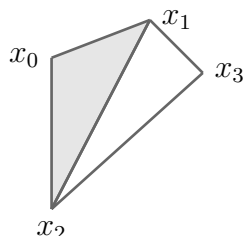


Figura 3.2: Kompleksi i simplekseve abstrakte L .

Le të shqyrtojmë kompleksin e simplekseve L nga figura 3.2. Dy shembuj të 1-zinxhirëve dhe shumës së tyre janë paraqitur në figurën 3.3.

Duke punuar në \mathbb{Z}_2 (pjesa e sipërme e figurës 3.3) kemi se 1-zinxhirët mund të trajtohen thjesht si nënbashkësi të koleksioneve të brinjëve, pasi orientimi nuk ka rëndësi (meqë në \mathbb{Z}_2 kemi $+1 = -1$). Shuma e zinxhirit të kuq $\{x_0, x_2\} + \{x_1, x_2\}$ dhe zinxhirit blu $\{x_1, x_2\} + \{x_1, x_3\}$ jep si rezultat zinxhirin vjollcë $\{x_0, x_2\} + \{x_1, x_3\}$.

Mirëpo nëse llogarisim në një fushë tjetër (pjesa e poshtme e figurës 3.3) kemi se orientimi është i rëndësishëm. Shuma e zinxhirit me ngjyrë të kuqe $\{x_1, x_0\} + \{x_0, x_2\} + \{x_2, x_3\}$ dhe zinxhirit me ngjyrë blu $\{x_1, x_0\} + \{x_3, x_2\}$ rezulton në zinxhirin me ngjyrë vjollcë $\{x_0, x_2\} + 2\{x_1, x_0\}$.

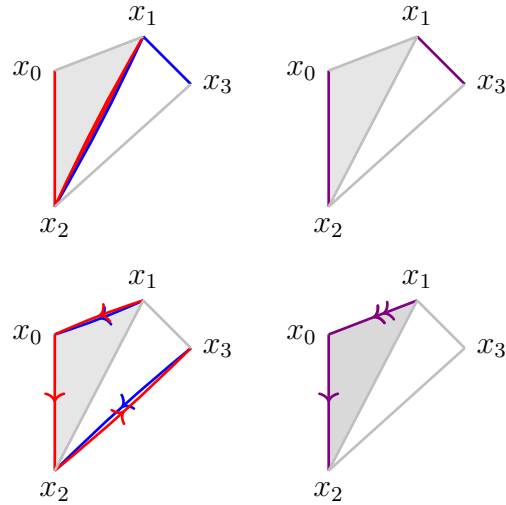


Figura 3.3: Rreshti i sipërm: mbledhja e zinxhirëve në \mathbb{Z}_2 . Rreshti i poshtëm: mbledhja e zinxhirëve në ndonjë fushë tjetër.

Zakonisht në praktikë përdoret fusha \mathbb{Z}_2 , sepse ajo e thjeshton ndjeshëm trajtimin e zinxhirëve duke e bërë orientimin të parëndësishëm (pasi $-1 = 1$) pra nuk ka nevojë të mbahet mend orientimi i çdo simpleksi. Kjo e lehtëson jo vetëm konceptimin vizual dhe teorik të strukturave topologjike, por edhe i përshtatet më mirë llogaritjeve kompjuterike. Në shumë algoritme që përdoren në Analizën Topologjike të të Dhënave dhe në aplikime të tjera, përfshirë ato që lidhen me homologjinë persistente, përdorimi i fushës \mathbb{Z}_2 zvogëlon kompleksitetin dhe rrit efikasitetin e përpunimit, duke shmangur mbajtjen e informacioneve shtesë për orientimin dhe duke e bërë implementimin më të thjeshtë dhe më të shpejtë.

3.3 Kufiri

Tani që kemi një përshkrim algebrik të bashkësive të p -simplekseve mund të formalizojmë nocionin e kufirit. Intuitivisht kufiri i një p -simpleksi përbëhet nga të gjitha faqet maksimale të tij.

Më formalisht, le të jetë $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ një p -simpleks, atëherë $\partial_p(\sigma)$ definohet nga:

$$\{x_1, \dots, x_p\} + \{x_0, x_2, \dots, x_p\} + \dots + \{x_0, \dots, x_{p-1}\} = \pm \sum_{i=0}^p \{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p\},$$

ku shënimi \hat{x}_i tregon se elementi x_i është larguar nga bashkësia. Vrejmë se $\partial_p(\sigma)$ është një

zinxhir $(p - 1)$ -dimensional.

Ky funksion përshkruan mënyrën se si një kompleks i simplekseve ndërtohet nga pjesët e tij më të vogla. Disa shembuj janë dhënë në figurë 3.4.

$$\partial_2 \left(\begin{array}{c} x_2 \\ \triangle \\ x_0 \quad x_1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} x_2 \\ \diagdown \\ x_1 \end{array} - \begin{array}{c} x_2 \\ \diagup \\ x_0 \end{array} + x_0 \text{---} x_1 \approx \begin{array}{c} x_2 \\ \triangle \\ x_0 \quad x_1 \end{array}$$

$$\partial_1 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ x_0 \quad x_1 \end{array} \right) = \bullet_{x_1} - \bullet_{x_0}$$

$$\partial_0(\cdot) = 0$$

Figura 3.4: Aplikimi i kufirit ∂_n në simplekset e dimensioneve 2, 1 dhe 0.

Kemi se ∂_p është një pasqyrim që dërgon një p -simpleks në një $(p - 1)$ -zinxhir. Duke pasur një strukturë të mirëpërcaktuar për grupet e zinxhirëve, tani mund ta zgjerojmë këtë në çdo zinxhir të mundshëm.

Përkufizim 3.3.1. *Le të jetë $p \in \mathbb{N}$. Pasqyrim i kufirit*

$$\partial_p : C_p(K; \mathbb{F}) \longrightarrow C_{p-1}(K; \mathbb{F})$$

është një funksion linear i definuar mbi bazën e $C_p(K; \mathbb{F})$ sipas këtij rregulli: për çdo p -simpleks të orientuar $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ imazhi i $\partial_p \sigma$ është shuma e faqeve maksimale të σ -së me orientimin e marrë nga σ , pra:

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p\}.$$

Gjithashtu definojmë pasqyrimin zero $\partial_0 : C_0(K; \mathbb{F}) \rightarrow 0$ në hapësirën vektoriale triviale që përmban vetëm vektorin zero.

Një fakt i rëndësishëm për formulimin algjebrik të homologjisë është se kur zbatohet dy herë radhazi pasqyrimin e kufirit rezultati është gjithmonë funksioni trivial. Kjo do të thotë se çdo element që gjendet në imazhin e një pasqyrimi të kufirit do të jetë gjithmonë pjesë e bërthamës së pasqyrimin të radhës.

Në shumicën e rasteve nuk do të tregojmë qartë indeksin e operatorit të kufirit ∂ , sepse nga konteksti do të jetë e qartë nëse po u referohemi të gjitha vlerave të p apo një vlerë specifike të p . Po ashtu, kur shkruajmë $\partial_p \sigma$ është e qartë që kemi të bëjmë me pasqyrimin ∂_p .

Nga ana tjetër simboli $\partial^2 = 0$ do të thotë që për çdo $p \in \mathbb{N}$ është veprimi i njëpasnjëshëm i operatorit të kufirit, pra

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$$

është funksioni që dërgon çdo element në vektorin zero.

Teoremë 3.3.2. $\partial^2 = 0$

Vërtetim. Mjafton të tregojmë se $\partial^2 \sigma = 0$ për një p -simpleks të orientuar

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}.$$

Vërejmë se $\partial^2 \sigma$ është një shumë formale e faqeve të σ të dimensionit $p - 2$.

Zgjedhim dy indeksa $i < j$ nga bashkësia $\{0, 1, \dots, p\}$ dhe shqyrtojmë se si paraqitet faqet

$$\sigma' = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p\}$$

në $\partial^2 \sigma$. Një faqe e tillë merret në dy mënyra, duke larguar kulmet x_i dhe x_j nga σ .

- Fillimisht largojmë kulmin x_j nga σ duke vepruar me ∂_p dhe më pas largojmë kulmin x_i nga simpleksi i mbetur duke vepruar me ∂_{p-1} . Indeksat e kulmeve të larguar janë j dhe i prandaj shenja në σ' është $(-1)^i (-1)^j$.
- Fillimisht largojmë kulmin x_i nga σ duke vepruar me ∂_p dhe më pas largojmë kulmin x_j nga simpleksi i mbetur duke vepruar me ∂_{p-1} . Indeksat e kulmeve të larguara janë i dhe $j - 1$ (pasi është larguar tashmë kulmi x_i dhe $i < j$, kulmi x_j tani është në pozitën $j - 1$), prandaj shenja në σ' është $(-1)^i (-1)^{j-1}$.

Duke qenë se këto dy shenja janë të kundërta kemi se shuma totale është zero. Kështu për çdo p -simpleks, kemi që $\partial^2 \sigma = 0$.

Rjedhim 3.3.3. $Im(\partial_{i+1}) \subseteq ker(\partial_i)$

Kufiri i një simpleksit $\{x_0, x_1, x_2\}$ të dhënë si në figurën 3.5 mund të llogaritet si vijon:

$$\partial(\{x_0, x_1, x_2\}) = \{x_0, x_1\} + \{x_1, x_2\} + \{x_2, x_0\}.$$

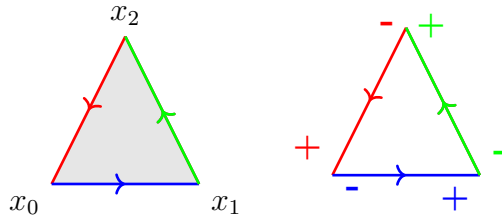


Figura 3.5: Kufiri i simpleksit $\{x_0, x_1, x_2\}$.

Kufiri i secilës brinjë është:

$$\partial(\{x_0, x_1\}) = x_1 - x_0, \quad \partial(\{x_1, x_2\}) = x_2 - x_1, \quad \partial(\{x_2, x_0\}) = x_0 - x_2.$$

Prandaj kemi se:

$$\partial^2(\{x_0, x_1, x_2\}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_0 - x_2) = 0.$$

Andaj $\partial^2 = 0$.

Koncepte e homologjisë që do të prezantojmë në vazhdim janë përgjithësime të vargut të homomorfizmave të grupeve ∂_i që plotësojnë Teoremën 3.3.2.

Përkufizim 3.3.4. Koleksioni i grupeve të zinxhirëve të lidhur përmes operatorit të kufirit quhet zinxhir i komplekseve:

$$\dots \longrightarrow C_p(K; \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(K; \mathbb{F}) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial} C_1(K; \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial} C_0(K; \mathbb{F}) \longrightarrow 0$$

Ky zinxhir i komplekseve përfaqëson një varg të grupeve ku çdo $C_p(K)$ është një grup që përfaqëson p -zinxhirët e një kompleksi të simplekseve dhe ∂_p janë pasqyrime që lidhin këto grupe, duke siguruar që çdo imazh i një pasqyrimi ∂_p është në bërthamën e pasqyrimit paraprak ∂_{p-1} .

Për qëllime të llogaritjeve operatori i kufirit zakonisht paraqitet si matricë me elemente nga fusha \mathbb{F} . Për çdo $p \in \mathbb{N}$ një matricë M_p që përfaqëson operatorin e kufirit ∂_p ndërtohet në këtë mënyrë:

- Shtyllat paraqesin p - simplekset e orientuara të K .
- Rreshtat paraqesin $(p - 1)$ - simplekset e orientuara të K .

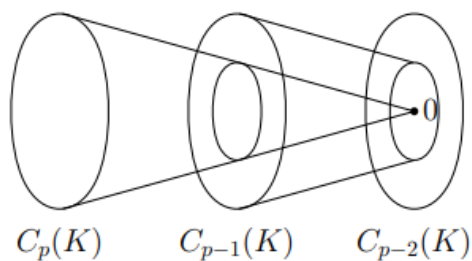


Figura 3.6: Skema e zixhirit të komplekseve.

- Elementi në pozicionin (i, j) të matricës së kufirit është $+1$ nëse simpleksi i shfaqet në kufirin e simpleksit j me të njëjtin orientim dhe -1 nëse shfaqet me orientim të kundërt. Nëse simpleksi i nuk është pjesë e kufirit të simpleksit j atëherë elementi përkatës është 0 .

Kur punojmë mbi fushën \mathbb{F}_2 ku $-1 = 1$, shenjat nuk bëjnë më dallim. Në këtë rast matrica përmban vetëm vlera 0 dhe 1 , që tregojnë praninë ose mungesën e një simpleksi në kufi, pa marrë parasysh orientimin.

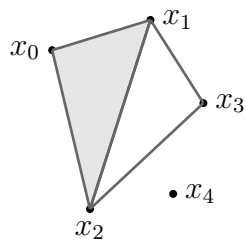


Figura 3.7: Komplekseve i simplekseve L .

Shembull 3.3.5. Matricat e kufirit M_1 dhe M_2 për kompleksin L të paraqitur në figurën 3.7 janë:

$$M_2 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1, x_2\} \\ \{x_0, x_1\} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \{x_1, x_2\} & \\ \{x_0, x_2\} & \\ \{x_1, x_3\} & \\ \{x_2, x_3\} & \end{matrix} \quad M_1 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1\} & \{x_1, x_2\} & \{x_0, x_2\} & \{x_1, x_3\} & \{x_2, x_3\} \\ \{x_0\} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \{x_1\} & \\ \{x_2\} & \\ \{x_3\} & \\ \{x_4\} & \end{matrix}$$

3.4 Grupet e cikleve dhe të kufijve

Përkufizim 3.4.1. Një p -zinxhir c e quajmë p -cikël nëse $\partial(c) = 0$. $Z_p = \ker \partial_p$ është grupi i p -të i cikleve dhe përbëhet nga të gjithë p -ciklet.

Kujtojmë që bërthama e një homomorfizmi linear është një nënhapësirë vektoriale e domenit të tij, andaj marrim pohimin:

Pohim 3.4.2. Z_p është nënhapësirë vektoriale e hapësirës $C_p(K)$.

Deri më tani kemi përkufizuar operatorin e kufirit, por ende nuk kemi sqaruar se cilët zinxhirë quhen kufij. Në mënyrë intuitive, kufij janë pikërisht ata zinxhirë që mund të merren si rezultat i aplikimit të operatorit të kufirit mbi një zinxhir me dimension më të lartë.

Përkufizim 3.4.3. Një p -zinxhir c është një p -kufi nëse ekziston një $c' \in C_{p+1}$ i tillë që $\partial(c') = c$. $B_p = \text{Im } \partial_{p+1}$ quhet grupi i p -të i kufijve dhe përbëhet nga të gjithë p -kufijtë.

Pohim 3.4.4. B_p është nënhapësirë vektoriale e hapësirës $C_p(K)$.

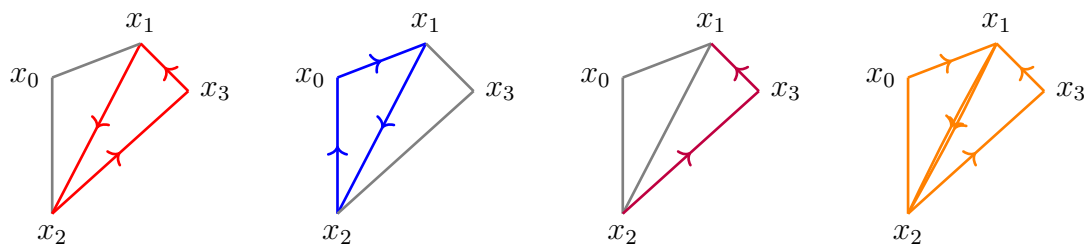


Figura 3.8: Katër ilustrime të ndryshme të cikleve dhe të kufijve.

Në figurën 3.8 paraqiten disa ilustrime të cikleve dhe të kufijve ku dy ilustrimet e para janë cikle, ndërsa ilustrimi i tretë tregon një zinxhir që nuk është cikël. Ilustrimi i katërt paraqet shumë të cikleve të mëparshme.

3.5 Grupet e homologjisë

Tani jemi gati të formalizojmë nocionin e vrimave. Kujtojmë që intuitivisht një vrimë është një cikël që nuk është një kufi, pra nuk është e mbushur nga diçka me dimension më të lartë.

Duke përdorur faktin që të gjitha objektet e përkufizuara deri tani formojnë hapësira vektoriale dhe $B_p(K)$ është nënhapësirë vektoriale e $Z_p(K)$, andaj ka kuptim të përkufizojmë herësin e tyre.

Përkufizim 3.5.1. Grupi homologjik i p -të $H_p(K)$ është grupi herës:

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$$

Një mënyrë ekuivalente për të shprehur grupin homologjik është:

$$H_p = \ker(\partial_p) / \text{Im}(\partial_{p+1}).$$

Shpesh përdoret shënimi $H_p(K; \mathbb{F})$ për të theksuar fushën \mathbb{F} mbi të cilën punojmë për llogaritjen e homologjisë.

Përkufizim 3.5.2. Grupi homologjik i p -të i realizimit gjeometrik $|K|$ të kompleksit të simplekseve K përkufizohet si:

$$H_p(|K|) := H_p(K).$$

Shembull 3.5.3. Do të llogarisim grupet e homologjisë së rrethit S^1 . Rikujtojmë se S^1 është hapësirë homeomorfe me realizimin gjeometrik të kompleksit të simplekseve të dhënë si në figurën 3.9.

Në vazhdim për thjeshtim të simbolikës nuk do i shënojmë $\{ , \}$ për simplekset. Gjithashtu për brinjët do të shënojmë $\{x_0, x_1\}$ me e_1 , $\{x_1, x_2\}$ me e_2 dhe $\{x_0, x_2\}$ me e_3 . Një ilustrim është dhënë figurën 3.10.

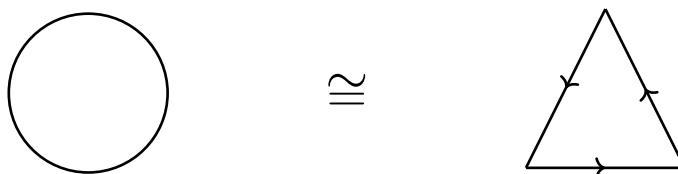


Figura 3.9: Përputhja homotopike mes rrethit dhe trekëndëshit.

Zinxhiri i komplekseve është:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(S^1) \xrightarrow{\partial_2} C_1(S^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(S^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Kemi që $C_0(S^1)$ është një kopje e \mathbb{R}^3 me bazë x_1, x_2, x_3 dhe $C_1(S^1)$ është një kopje e \mathbb{R}^3 me bazë e_1, e_2, e_3 , ndërsa $C_2(S^1) = 0$ pasi kemi të bëjmë vetëm me skeletin e trekëndëshit, pra interiori i tij është i zbrazët.

Pra, fitojmë zinxhirin:

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

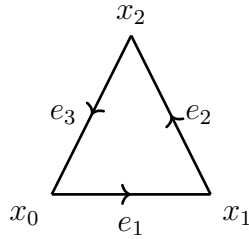


Figura 3.10: Simpleksi i rrethit S^1 .

Njehsojmë kufijtë e simplekseve me radhë:

$$\partial_1(e_1) = x_1 - x_0, \quad \partial_1(e_2) = x_2 - x_1, \quad \partial_1(e_3) = x_0 - x_2$$

Pasi ∂_0 dhe ∂_3 janë pasqyrimet triviale, kemi se $\ker \partial_0 \cong \mathbb{R}^3$ dhe $\text{Im } \partial_2 \cong 0$.

Tani do të njehsojmë grupet e homologjisë.

$$H_0(S^1) = \ker(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle / \langle x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_0 - x_2 \rangle$$

Një mënyrë për ta menduar se sa është herësi është t'i mendojmë elementet $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_0 - x_2$ si zero. Një analogji është aritmetika modulo 3, ku të gjithë shumëfishat e 3-shit i mendojmë si zero.

$$x_1 - x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = x_1, \quad \text{dhe} \quad x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$$

Pra, $x_0 = x_1 = x_2$. Andaj $H_0(S^1) \cong \mathbb{R}$.

Në dimensionin një kemi se:

$$H_1(S^1) = \ker(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2)$$

Për të gjetur $\ker(\partial_1)$, shikojmë zgjidhjen e ekuacionit:

$$\partial_1(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$$

$$a(x_1 - x_0) + b(x_2 - x_1) + c(x_0 - x_2) = 0$$

$$(c - a)x_0 + (a - b)x_1 + (b - c)x_2 = 0$$

Pra, kemi fituar një sistem të ekuacioneve:

$$\begin{cases} c - a = 0 \\ a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = c, \quad b = a$$

ose

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pra

$$\ker \partial_1 = t(e_1 + e_2 + e_3)$$

Andaj

$$H_1(S^1) = \ker(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) = \ker(\partial_1) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \cong \mathbb{R}$$

Pra grupet e homologjisë së rrethit janë:

$$H_i(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{nëse } i = 0, 1 \\ 0 & \text{nëse } i > 1 \end{cases}$$

Shembull 3.5.4. Do të llogarisim grupet e homologjisë së diskut D , të cilin e kemi paraqitur si kompleks të simplekseve në figurën 3.11. Ngjashëm si në shembullin 3.5.3 do të përdorim simbolikën e njëjtë.

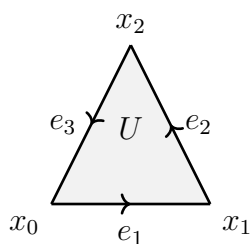


Figura 3.11: Simpleksi i diskut D .

Zinxhiri i komplekseve është:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(D) \xrightarrow{\partial_2} C_1(D) \xrightarrow{\partial_1} C_0(D) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Në mënyrë analoge si në shembullin paraprak ku njehsuam grupet e homologjisë së rrethit,

kemi se $C_0(D)$ dhe $C_1(D)$ janë kopje të \mathbb{R}^3 , mirëpo këtu kemi që $C_2(D)$ është një 2-simpleks U , pasi interiori i trekëndëshit tani nuk është i zbrazët. Andaj kemi që $C_2(D) \cong \mathbb{R}$. Pra, fitojmë zinxhirin:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Kufiri i simpleksit U është:

$$\partial_2(U) = e_1 + e_2 + e_3$$

Njësoj si më parë, kemi:

$$H_0(D) \cong \mathbb{R}.$$

Pasi ∂_3 është pasqyrim trivial, kemi se $\text{Im } \partial_3 \cong 0$. Tani do të njehsojmë $\ker(\partial_2)$ dhe $\text{Im}(\partial_2)$, në mënyrë që të njehsojmë grupet e homologjisë.

$$H_1(D) = \ker(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2)$$

Nga shembulli paraprak kemi se:

$$\ker(\partial_1) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$$

Andaj

$$H_1(D) = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle / \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \cong 0$$

Ndërsa

$$H_2(D) = \ker(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3) = \ker(\partial_2) \cong 0$$

pasi $C_2(D)$ gjenerohet vetëm nga U , pra të gjitha elementet e këtij grupi janë shumëfisha të U dhe të vetmit shumëfisha që dërgohen në 0 janë shumëfishat e zeros. Prandaj $\ker(\partial_2) \cong 0$. Pra, grupet e homologjisë së diskut janë:

$$H_i(D) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{nëse } i = 0 \\ 0 & \text{nëse } i \neq 0 \end{cases}$$

Nga shembujt 3.5.3 dhe 3.5.4 për grupet e homologjisë së rrethit S^1 dhe diskut D , vërejmë se homologjia na jep një mënyrë për të dalluar format topologjike të këtyre hapësirave. Të dyja hapësirat kanë grupin homologjik të dimensionit zero izomorfe me \mathbb{R} . Megjithatë te grupi i parë dallojmë një ndryshim thelbësor: te rrethi S^1 , $H_1(S^1) \cong \mathbb{R}$ që tregon se ekziston një vrimë (një lak që nuk mund të zhduket) ndërsa te disku D^2 ,

$H_1(D^2) \cong 0$ që do të thotë se nuk ka vrima, pra çdo laku mund të tkurret në një pikë brenda tij. Pra, homologjia na ndihmon të bëjmë një përshkrim algjebrik të dallimeve mes hapësirave.

Shembull 3.5.5. Do të llogarisim prapë grupet e homologjisë së rrethit S^1 , por tani duke përdorur një kompleks simpleksesh që përputhet homotopikisht me katrorin. Një ilustrim i këtij kompleksi të simplekseve është dhënë në figurës 3.13. Ngjashëm për thjeshtsi të

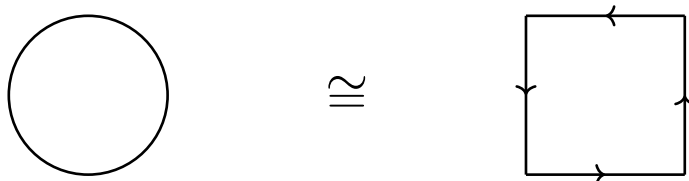


Figura 3.12: Përputhja homotopike mes rrethit dhe katrorit.

simbolikës do të përdorin shënime e njëjta si në shembullin 3.5.3 dhe zinxhiri i komplekseve në mënyrë analoge do të jetë:

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Kufijtë e brinjëve janë si më poshtë:

$$\partial_1(e_1) = x_1 - x_0, \quad \partial_1(e_2) = x_2 - x_1, \quad \partial_1(e_3) = x_3 - x_2, \quad \partial_1(e_4) = x_0 - x_3$$

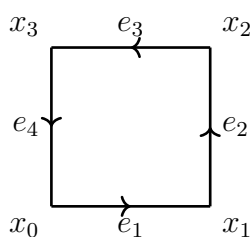


Figura 3.13: Kompleksi i simplekseve të rrethit S^1 .

Pasi ∂_2 dhe ∂_0 janë pasqyrime triviale kemi që $\text{Im}(\partial_2) \cong 0$, dhe $\ker(\partial_0) \cong \mathbb{R}^4$.

$$H_0(S) = \ker(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{R}^4 / \langle x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_0 - x_3 \rangle \cong \mathbb{R}$$

$$H_1(S) = \ker(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) = \ker(\partial_1) = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \rangle \cong \mathbb{R}$$

Pra, grupet e homologjisë janë:

$$H_i(S) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{nëse } i = 0, 1 \\ 0 & \text{nëse } i > 1 \end{cases}$$

Shembujt 3.5.3 dhe 3.5.5 ilustrojnë se si homologjia është një invariante topologjike, pra për dy komplekse të ndryshme të simplekseve që modelojnë të njëjtën hapësirë topologjike në këtë rast rrethin S^1 , pra grupet e homologjisë janë të njëjta. Kjo nënvizon faktin që homologjia nuk varet nga për zgjedhja konkrete e kompleksit, por vetëm nga forma topologjike themelore e hapësirës. Ky rezultat me rëndësi të veçantë do të trajtohet në kapitullin 4.

Teoremë 3.5.6. *Nëse realizimet gjeometrike të K dhe K' janë homotopike si hapësira topologjike atëherë grupet e homologjisë janë izomorfe:*

$$H_p(K) \cong H_p(K')$$

për çdo fushë \mathbb{F} dhe për çdo $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Megjithatë e kundërta nuk është e vërtetë në rast të përgjithshëm, nga izomorfizmi në homologji nuk rrjedh domosdoshmërisht që K dhe K' janë ekuivalente sipas homotopisë. Kjo sepse homologjia kap vetëm informacionin mbi vrimat dhe strukturën topologjike në nivel global, por nuk ruan të gjithë informacionin rreth strukturës homotopike të hapësirave.

Përkufizim 3.5.7. $\beta_p := \dim H_p = \dim Z_p - \dim B_p$ është numri i p -të i Bett-it.

Në këtë përkufizim dim është dimensionin i hapësirës vektoriale, pra $\dim H_p$ është numri i elementeve në bazën e hapësirës H_p .

Kur punojmë mbi një fushë, grupet homologjike $H_p(K; \mathbb{F})$ janë hapësira vektoriale dhe çdo klasë homologjie përfaqëson një nënhapësirë përfaqësimi të cikleve që ndryshojnë vetëm me kufij. Më saktë, klasa homologjike e një cikli c përfaqësohet nga elementi $[c] = c + B_p$ ku B_p është nënhapësira e kufijve brenda hapësirës së cikleve.

Dy cikle c dhe c' quhen homologe nëse i përkasin të njëjtës klasë homologjie, domethënë nëse $[c] = [c']$. Kjo ndodh kur ekziston një kufi $b \in B_p$ i tillë që $c = c' + b$, apo që diferenca e tyre është një kufi pra $c - c' \in B_p$.

Për një shembull të cikleve homologe, shihni figurën 3.14.

Në këtë mënyrë, çdo element i grupit të homologjisë është në një klasë të ekuivalencës të cikleve dhe kjo klasë zakonisht shënohet me $[c]$, ku c është një cikël përfaqësues.

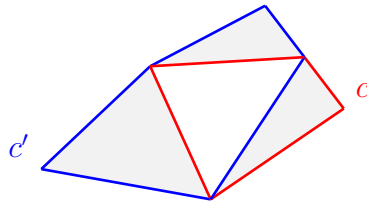


Figura 3.14: c' dhe c janë cikle homologe.

Për shembull, le të marrim kompleksin L të dhënë në figurën 3.15. Le të marrim ciklin $c = \{x_1, x_2\} + \{x_2, x_3\} + \{x_3, x_1\}$, atëherë grupi homologjik $H_1(L; \mathbb{F})$ përbëhet nga të gjitha kombinimet lineare të formës $k[c]$, ku k është një element i fushës \mathbb{F} . Edhe pse gjeometrikisht kemi vetëm një vrimë në kompleks, grupi homologjik përmban më shumë elemente, sepse përfshin të gjitha shumëfishat e ciklit c . Megjithatë, e gjithë hapësira është e mbështjellë vetëm nga $[c]$, kështu që numri i vrimave nuk llogaritet sipas numrit të elementeve të grupit, por sipas dimensionit të tij si hapësirë vektoriale, që në këtë rast është 1.

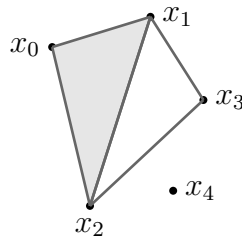


Figura 3.15: Kompleksi i simpleksve abstrakte L .

Në mënyrë më të përgjithshme, çdo grup homologjik me koeficientë në një fushë \mathbb{F} është një hapësirë vektoriale dhe është izomorf me \mathbb{F}^r për ndonjë dimension r . Qëllimi ynë kryesor gjatë llogaritjeve është të gjejmë këtë dimension $r = \beta_q$, i cili përfaqëson numrin e vrimave q -dimensionale:

- β_0 është i njëjtë për çdo fushë \mathbb{F} dhe përfaqëson numrin e komponentëve të lidhshmërisë të kompleksit K (pra vrimat 0- dimensionale);
- β_1 përfaqëson numrin e vrimave në kuptimin klasik gjeometrik (1- dimensionale) mirëpo në fusha të ndryshme mund të zbulojnë vrima të ndryshme në disa raste (siç do të ilustruhet në shembullin e shishes së Klein-it).
- β_2 përfaqëson numrin e zgavrave apo të zbrazëtirave të mbyllura (vrima 2- dimensionale).

Këto interpretime do të shqyrtohen në vazhdim të këtij kapitulli.

Shembull 3.5.8. Në figurën 3.15 paraqitet një shembull i një kompleksi të simplekseve abstrakte L . Duke përdorur këtë figurë, analizojmë grupet e homologjisë $H_0(L; \mathbb{F})$ dhe $H_1(L; \mathbb{F})$.

Grupi homologjik $H_0(L; \mathbb{F})$ ka dimension 2, që korrespondon me dy komponentët e lidhshmërisë së kompleksit. Një bazë për këtë grup është:

$$[\{x_0\}] = [\{x_1\}] = [\{x_2\}] = [\{x_3\}] \text{ dhe } [\{x_4\}]$$

Kjo tregon se kulmet x_0, x_1, x_2, x_3 janë në të njëjtin komponent të lidhshmërisë, ndërsa kulmi x_4 formon një komponent më vete.

Grupi homologjik $H_1(L; \mathbb{F})$ ka dimension 1, që përfaqëson një vrimë në kompleks. Një bazë për këtë grup është:

$$[\{x_2, x_3\} + \{x_3, x_1\} + \{x_1, x_2\}]$$

Ky cikël formon një lak të mbyllur që nuk është kufi i ndonjë 2- simpleksi, prandaj përfaqëson një klasë jotriviale në H_1 .

3.6 Llogaritja e homologjisë

Një nga metodat më efektive për të llogaritur grupet e homologjisë është përmes matricave të kufirit. Reduktimi i matricave na mundëson të përcaktojmë rangun e një transformimi linear.

Para se të japim detaje mbi llogaritjen e rangut le të shpjegojmë si mund ta përdorim këtë metodë për të llogaritur numrat e Bett-it.

Le të jetë K një kompleks i simplekseve abstrakte me dimension n dhe le të jetë \mathbb{F} një fushë koeficientësh. Për çdo $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ e shënojmë me n_p numrin e simplekesve të dimensionit p në K .

Pohim 3.6.1.

$$\dim \ker \partial_p = n_p - \text{rank} \partial_p$$

$$\beta_p = n_p - \text{rank} \partial_p - \text{rank} \partial_{p+1}$$

Numrat e Bett-it mund të shprehen vetëm duke përdorur numrin e simplekesve të një dimensionit të caktuar dhe rangun e operatorëve të kufijve përkatës.

Tani le të fokusohemi në llogaritjen e rangut. Duke pasur një matricë të kufirit rangi i saj mund të gjendet lehtësisht nga forma e reduktuar e rreshtave ose e kolonave.

Për të arritur një formë të reduktuar të rreshtave të një matrice mund të përdorim transformimet e mëposhtme mbi fushën \mathbb{F} :

R1: Ndërrimi i dy rreshtave.

R2: Shumëzimi i një rreshti me një element jozero të \mathbb{F} .

R3: Shuma e një shumëfishi të një rreshti në një rresht tjetër.

C1: Ndërrimi i dy kolonave.

Si përfundim synojmë të arrijmë një transformim të tillë:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Simbolet $*$ janë elemente të çfarëdoshme nga \mathbb{F} . Në këtë rast r elementet e para të diagonales vendosen të jenë 1. Ky është një version i formës së reduktuar të rreshtave dhe mund të arrihet gjithmonë. Megjithatë ekziston një version tjetër i formës së reduktuar të rreshtave, ku këto elemente në diagonale janë jozero por jo domosdoshmërisht 1, ndërsa elementet e tjera $*$ mbeten të rastësishme (dhe mund të jenë edhe zero) në \mathbb{F} . Duke përdorur këtë version rangu përcaktohet në të njëjtën mënyrë, mirëpo zakonisht kemi më pak veprime mbi rreshtat për ta arritur.

Numri i elementeve jotriviale në diagonale r paraqet rangun e matricës.

Shpesh nuk përdorim transformimin $C1$ dhe reduktojmë matricën vetëm në formën klasike të reduktuar të rreshtave, e cila zakonisht arrihet përmes eliminimit të Gauss-it.

Në mënyrë të ngjashme mund të llogarisim edhe formën e reduktuar të kolonave duke përdorur transformimet përkatëse $C1, C2, C3$ dhe në disa raste $R1$.

Shembull 3.6.2. Do të njehsojmë grupet e homologjisë të kompleksit të simplekseve L nga figura 3.16. Fillimisht ndërtojmë zinxhirin e komplekseve:

$$0 \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ku $C_2 \cong \mathbb{R}^1$, $C_1 \cong \mathbb{R}^5$, $C_0 \cong \mathbb{R}^5$.

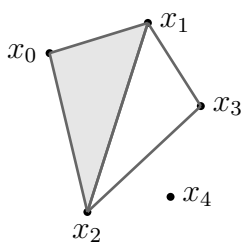


Figura 3.16: Kompleksi i simplekseve abstrakte L .

Matricat e kufirit M_2 dhe M_1 përfaqësojnë transformimet lineare që lidhin këto hapësira, dhe për të gjetur homologjinë, do të përdorim reduktimin e matricave për të përcaktuar rangun dhe imazhin e tyre. Pra, do të llogarisim rangun e matricave të kufirit në dimensionet 2 dhe 1, për të gjetur grupet e homologjisë

$$H_i(L) = \frac{\ker \partial_i}{\text{Im } \partial_{i+1}}.$$

Matricat e kufirit në dimensionin 2 dhe 1, përkatësisht janë:

$$M_2 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1, x_2\} \\ \begin{matrix} \{x_0, x_1\} \\ \{x_1, x_2\} \\ \{x_0, x_2\} \\ \{x_1, x_3\} \\ \{x_2, x_3\} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad M_1 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1\} & \{x_1, x_2\} & \{x_0, x_2\} & \{x_1, x_3\} & \{x_2, x_3\} \\ \begin{matrix} \{x_0\} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_4\} \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Duke kryer vetëm veprime mbi rreshta, marrim formën e reduktuar për dy matricat përkatëse. Për matricën M_2 janë kryer veprimet:

$$R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1, \quad R_3 \leftrightarrow R_3 + R_1.$$

Ndërsa për matricën M_1 janë bërë këto veprime:

$$R_1 \leftrightarrow -R_1, \quad R_2 \leftrightarrow -R_2 + R_1, \quad R_3 \leftrightarrow -R_3 + R_2, \quad R_4 \leftrightarrow -R_4 + R_3.$$

$$M'_2 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1, x_2\} \\ \{x_0, x_1\} \\ \{x_1, x_2\} \\ \{x_0, x_2\} \\ \{x_1, x_3\} \\ \{x_2, x_3\} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dhe} \quad M'_1 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1\} & \{x_1, x_2\} & \{x_1, x_3\} & \{x_0, x_2\} & \{x_2, x_3\} \\ \{x_0\} \\ \{x_1\} \\ \{x_2\} \\ \{x_3\} \\ \{x_4\} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Në këtë rast forma e reduktuar përkon për të gjitha fushat \mathbb{F} , por forma e reduktuar dhe rangu i matricave në përgjithësi varen nga fusha \mathbb{F} .

Rangu i një matrice të tillë është numri i pivotëve. Për të siguruar që pivotët të jenë vetëm në diagonale siç kërkohet, duhet të ndërronim kolonat 3 dhe 4. Rangu i matricave përkatëse: $\text{Rank } \partial_2 = 1$ dhe $\text{Rank } \partial_1 = 3$. Pasi $n_2 = 1$, $n_1 = 5$ dhe $n_0 = 5$, andaj kemi se:

$$H_0(L) = \frac{\ker \partial_0}{\text{im } \partial_1} = \frac{\mathbb{R}^5}{\mathbb{R}^3} \cong \mathbb{R}^2$$

Pasi $\ker \partial_0 = C_0 = \mathbb{R}^5$ dhe $\text{im } \partial_1$ ka dimension $\text{rank } \partial_1 = 3$.

$$H_1(L) = \frac{\ker \partial_1}{\text{im } \partial_2} = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^1} \cong \mathbb{R}^1$$

Ku $\dim \ker \partial_1 = \dim C_1 - \text{rank } \partial_1 = 5 - 3 = 2$ dhe $\dim \text{im } \partial_2 = \text{rank } \partial_2 = 1$.

$$H_2(L) = \frac{\ker \partial_2}{\text{im } \partial_3} \cong \frac{\mathbb{R}^0}{0} \cong 0,$$

sepse $\dim \ker \partial_2 = \dim C_2 - \text{rank } \partial_2 = 1 - 1 = 0$ dhe $\partial_3 = 0$.

Ndërsa numrat e Bett-it janë:

- $\beta_2 = n_2 - \text{rank } \partial_2 = 0$ - Kompleksi nuk përmban vrima të dimensionit të dytë.
- $\beta_1 = n_1 - \text{rank } \partial_1 - \text{rank } \partial_2 = 1$ - është numri i vrimave në kompleks.
- $\beta_0 = n_0 - \text{rank } \partial_1 = 2$ - numri i komponentëve të lidhur.

Ndërsa llogaritja e formës së reduktuar mjafton për të gjetur numrat e Bett-it shpesh na intereson edhe të përcaktojmë ciklet përfaqësuese të grupeve të homologjisë. Për këtë qëllim përdorim një formë tjetër kanonike të matricës - formën normale të Smith-it.

Kjo formë arrihet nga forma e reduktuar e rreshtave duke eliminuar elementet * në zero duke përdorur trasformimet në rreshta $R1, R2, R3$ dhe kolona $C1, C2, C3$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Për të marrë ciklet përfaqësuese duhet të përdorim rreshta dhe kolona të reduktuar:

- Reduktimet e kolonave nga indeksi $r + 1$ e tutje formojnë bazën e bërthamës.
- Kufijtë e reduktuar të kolonave deri në indeksin r formojnë bazën e imazhit.

Shembull 3.6.3. Le të llogarisim përfaqësuesit e grupeve të homologjisë për kompleksin e simplekseve L nga shembulli 3.6.2. Matricat e kufirit në formë të reduktuar janë:

$$M'_2 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1, x_2\} \\ \{x_0, x_1\} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \{x_1, x_2\} & \\ \{x_0, x_2\} & \\ \{x_1, x_3\} & \\ \{x_2, x_3\} & \end{matrix} \quad \text{dhe} \quad M'_1 = \begin{matrix} & \{x_0, x_1\} & \{x_1, x_2\} & \{x_1, x_3\} & \{x_0, x_2\} & \{x_2, x_3\} \\ \{x_0\} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \{x_1\} & \\ \{x_2\} & \\ \{x_3\} & \\ \{x_4\} & \end{matrix}$$

Matrica M'_2 është veçse në formën normale të Smith-it. Për matricën M'_1 , forma normale e Smith-it është arritur duke kryer këto veprime me radhë në kolonat e saj:

$$C_3 \leftrightarrow C_3 - C_1, \quad C_4 \leftrightarrow C_4 - C_1 - C_2, \quad C_5 \leftrightarrow C_5 - C_3.$$

$$\begin{matrix} & \{x_0, x_1\} & \{x_1, x_2\} & \{x_1, x_3\} - \{x_1, x_2\} & \{x_0, x_2\} - \{x_1, x_2\} - \{x_0, x_1\} & \{x_2, x_3\} - \{x_1, x_3\} + \{x_1, x_2\} \\ \{x_0\} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \{x_1\} & \\ \{x_2\} & \\ \{x_3\} & \\ \{x_4\} & \end{matrix}$$

Tani ndërtojmë përfaqësuesit e homologjisë sipas dimensioneve:

Dimensioni 0:

1. $\ker \partial_0$ ka një bazë që përbëhet nga $\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}$.
2. $\text{Im } \partial_1$ ka një bazë që formohet nga imazhet e tri kolonave të para të shënuara të formës normale të Smith-it, pra $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\} - \{x_1, x_2\}$. Baza që merret në këtë mënyrë është:

$$\{x_1\} - \{x_0\}, \{x_2\} - \{x_1\} \text{ dhe } \{x_3\} - \{x_1\} + \{x_2\} - \{x_1\}$$

3. Mund të plotësojmë bazën nga pika paraprahe deri në bazën e $\ker \partial_0$ duke shtuar për shembull $\{x_0\}$ dhe $\{x_4\}$ dhe kështu $\{x_0\}$ dhe $\{x_4\}$ përfaqësojnë dy 0-VRIMA që mbështjellin $H_0(L)$.

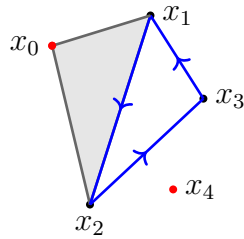


Figura 3.17: Përfaqësuesit e bazave të grupeve të homologjisë të L . Përfaqësuesit $\{x_0\}$ dhe $\{x_4\}$ me ngjyrë të kuqe, që përfaqësojnë $H_0(L)$ dhe përfaqësuesi $\{x_2, x_4\} - \{x_1, x_3\} + \{x_1, x_2\}$ në ngjyrë të kaltër, që përfaqëson $H_1(L)$.

Dimensioni 1:

1. $\ker \partial_1$ ka një bazë që përbëhet nga $\{x_0, x_2\} - \{x_1, x_2\} - \{x_0, x_1\}, \{x_2, x_3\} - \{x_1, x_4\} + \{x_1, x_2\}$.
2. $\text{Im } \partial_1$ ka një bazë që formohet nga imazhet (kufijte) e kolonës së parë të reduktuar të formës normale të Smith-it, pra $\{x_0, x_1, x_2\}$. Baza që merret në këtë mënyrë është

$$\{x_0, x_1\} + \{x_1, x_2\} - \{x_0, x_2\}.$$

3. Mund të plotësojmë bazën nga pika paraprahe deri në bazën e $\ker \partial_0$, për shembull duke shtuar $\{x_2, x_3\} - \{x_1, x_3\} + \{x_1, x_2\}$ dhe kështu $\{x_2, x_3\} - \{x_2, x_3\} + \{x_1, x_2\}$ përfaqëson një 1-VRIMË që mbështjell $H_1(L)$.

3.7 Homologjia zero

Le të jetë K një kompleks i simplekseve dhe \mathbb{F} një fushë e çfarëdoshme. Do të tregojmë se β_0 është numri i komponentëve të lidhshmërisë së kompleksit të simpleksave. Grupi homologjik $H_0(K)$ llogaritet duke përdorur vargun e mëposhtëm:

$$C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Për të njehsuar $H_0(K; \mathbb{F})$ duhet të përcaktojmë bërthamën e operatorit të kufirit $\ker \partial_0$ dhe imazhin e tij $\text{Im } \partial_1$. Meqë ∂_0 është trivial atëherë çdo element i $C_0(K)$ është në bërthamën e tij, pra:

$$\ker \partial_0 = C_0(K).$$

Për të përcaktuar $\text{Im } \partial_1$ vërtetojmë pohimin në vazhdim.

Pohim 3.7.1. *Le të jetë K një kompleks i simplekseve, \mathbb{F} një fushë cilado dhe $x, y \in V$ dy kulme. Kemi se $\{y\} - \{x\} \in \text{Im } \partial_1$ atëherë dhe vetëm atëherë kur x dhe y janë në të njëjtën komponent të lidhshmërisë së kompleksit K .*

Vërtetim. Supozojmë se x dhe y ndodhen në të njëjtën komponent të lidhshmërisë të K . Atëherë ekziston një rrugë nga x në y e përbërë nga kulmet e kompleksit K . Le të jetë $x = v_0, v_1, \dots, v_k = y$ rruga e tillë. Le të jetë $\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} \{x_i, x_{i+1}\}$ 1-zinxhir. Duke vepruar me operatorin e kufirit mbi të, kemi që:

$$\partial_1(\alpha) = \sum_{i=0}^{k-1} \partial_1(\{v_i, v_{i+1}\}) = \sum_{i=0}^{k-1} (\{v_{i+1}\} - \{v_i\}) = \{v_k\} - \{v_0\} = \{y\} - \{x\}.$$

Prandaj $\{y\} - \{x\} = \partial_1(\alpha) \in \text{Im}(\partial_1)$.

Tregojmë tani të anasjelltën. Supozojmë se $\{y\} - \{x\} \in \text{Im}(\partial_1)$. Atëherë ekziston një 1-zinxhir α i tillë që $\partial_1(\alpha) = \{y\} - \{x\}$. Le të jetë $K' \leq K$ komponenti i lidhshmërisë të kompleksit K që përmban kulmin x . Definojmë α' të jetë në α në K' , pra pjesa e zinxhirit α që përbëhet vetëm nga ato kulme që ndodhen në K' . Asnjë kulm nga $V \setminus \{x, y\}$ nuk paraqitet në $\partial\alpha'$, pasi asnjë kulm nuk paraqitet as në $\partial\alpha$ dhe termat që përmbajnë brinjë me një nga këto kulme janë të njëjtë si në α , ashtu edhe në α' . Prandaj $\partial\alpha'$ është $\{y\} - \{x\}$ në rast se $y \in K'$ dhe $\{x\}$ në të kundërtën.

Vërejmë se koeficientët para kulmeve në kufirin e çdo simpleksi shumohen dhe japin

zero. Pasi për një 1-simpleks $\{z, w\}$ kemi:

$$\partial(k\{z, w\}) = k\{w\} - k\{z\}$$

Pra, koeficientët për kulmet z dhe w janë përkatësisht $-k$ dhe k dhe shuma e tyre është $k + (-k) = 0$. Për më tepër, për shkak të linearitetit të operatorit të kufirit ∂ , kjo vlen edhe për çdo zinxhir. Andaj vetëm rasti i parë është i mundur pra $\partial\alpha' = \{y\} - \{x\}$.

□

Supozojmë se K_1, K_2, \dots, K_n janë komponentët e lidhshmërisë të kompleksit K dhe se $x_i \in K_i$ për çdo i . Do të kombinojmë informacionet në vijim për të përshkruar grupin e homologjisë të dimensionit zero $H_0(K; \mathbb{F})$:

1. Barazimi $\ker \partial_0 = C_0(K; \mathbb{F})$ do të thotë që $\ker \partial_0 = Z_0(K; \mathbb{F})$ dhe ka një bazë të përbërë nga kulmet $\{\{x\}\}_{x \in V}$.
2. Për çdo brinjë $\{x, y\} \in K$, kemi $\partial\{x, y\} = \{y\} - \{x\}$, pra $\{x\}$ dhe $\{y\}$ janë të njëjta në grupin e homologjisë $[\{x\}] = [\{y\}]$.
3. Sipas Pohimit 3.7.1, klasat e ekuivalencës së dy kulmeve në homologji përputhen atëherë dhe vetëm atëherë nëse ato ndodhen në të njëjtin komponent të lidhshmërisë.
4. Nga pika 1, $\{\{x\}\}_{x \in V}$ e mbështjell $H_0(K; \mathbb{F})$. Por nga pikat 2 dhe 3 kemi se edhe $\{\{v_i\}\}_{i=1}^n$ e mbështjell atë.
5. Koleksioni $\{\{v_i\}\}_{i=1}^n$ është linearisht i pavarur. Vërtetimi është i ngjashëm si në pjesën e dytë të Pohimit 3.7.1.

Koleksioni $\{\{v_i\}\}_{i=1}^n$ formon një bazë për $H_0(K; \mathbb{F})$. Prandaj dimensionin e këtij grupi është i barabartë me numrin e komponentëve të lidhshmërisë të kompleksit K , pra:

$$\beta_0 = \dim H_0(K; \mathbb{F}) = n.$$

Në mënyrë të veçantë, nëse kompleksi K është i lidhur, atëherë ekziston vetëm një komponent i lidhshmërisë, pra $n = 1$ dhe si rrjedhim:

$$\beta_0 = \dim H_0(K; \mathbb{F}) = 1.$$

3.8 Homologjia e grafeve

Le të jetë K një kompleks i simplekseve që është një graf i lidhur në rrafsh dhe le të jetë \mathbb{F} cilado fushë. Tregojmë se β_1 është numri i vrimave që K gjeneron në rrafsh.

Grupi i homologjisë $H_1(K)$ llogaritet nga vargu

$$C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K).$$

Pasi në një graf planar nuk kemi 2– simplekse (trekëndësha) atëherë $C_2(K) = 0$, andaj $H_1(K) = \ker \partial_1$, kështu që mjafton të përcaktojmë bërthama e ∂_1 .

1. Le të jetë $K_0 \leq K$ një pemë maksimale me degët e_1, e_2, \dots, e_n .
2. Koleksioni i kufijve $\partial e_1, \partial e_2, \dots, \partial e_n$ është linearisht i pavarur. Pasi $K_0 \cong 0$ homologjia e parë e tij është triviale nga Teorema 3.5.6 dhe pasi K_0 nuk përmbanë 2– simplekse (trekëndësha) kemi që $H_1(K_0) = \ker \partial_1|_{C_1(K_0)}$. Në veçanti $\partial_1|_{C_1(K_0)}$ është injektiv. Kolonat e matricës së tij janë $\partial e_1, \partial e_2, \dots, \partial e_n$ dhe nga injektiviteti kemi se ato janë linearisht të pavarura.

Në figurën 3.18 paraqitet një argument gjeometrik që shpjegon pse koleksioni i kufijve të brinjëve të një peme është linearisht i pavarur. Le të supozojmë se, për pemën në anën e majtë të figurës, një kombinim linear i kufijve të brinjëve të saj jep vektorin zero. Meqenëse kulmi a shfaqet vetëm në brinjën $\{a, d\}$, koeficienti përkatës për atë brinjë në kombinimin linear duhet të jetë zero. I njëjti argument vlen edhe për kulmet b dhe c , kështu që kombinimi linear përmban vetëm brinjë nga nënpema në anën e djathtë të figurës. Duke përsëritur të njëjtin arsyetim për kulmet d dhe e , arrijmë në përfundimin se kombinimi linear është trivial, pra të gjithë koeficientët janë zero. Prandaj, pohimi është i saktë. Ky arsyetim vlen për çdo pemë.

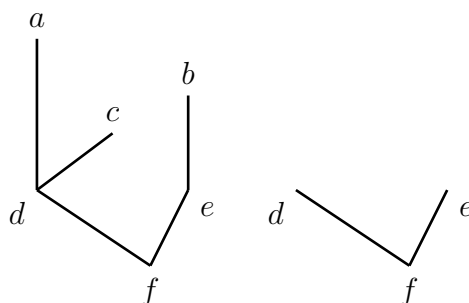


Figura 3.18

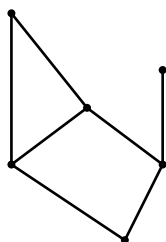
3. Le të jetë W mbështjellësi i $\partial e_1, \partial e_2, \dots, \partial e_n$.
4. Le të jenë $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_m$ degët e K që nuk janë në K_0 , ku çdo e_j është një degë nga kulmi x_j në kulmin y_j .
5. Shtimi i secilës prej degëve $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_m$ krijon një cikël të ri të mbyllur, pra një vrimë topologjike. Kjo ndodh sepse secila prej këtyre degëve lidh dy kulme që tashmë janë të lidhura në pemën maksimale K_0 përmes një rruge ekzistuese dhe kështu shtimi i degës e_j krijon një cikël të ri.

Pra, në këtë mënyrë çdo shtim i një dege e rrit dimensionin e bërthamës të pasqyrimin të parë të kufirit me 1 pasi $\partial e_j \in W$ për çdo $j \in \{n+1, n+2, \dots, m\}$. Kjo do të thotë se kufijtë e këtyre degëve të reja nuk japin informacion të ri në imazhin e ∂_1 dhe prandaj kontribuojnë në bërthamë duke rritur dimensionin e saj.

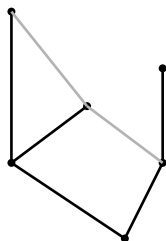
Në fund të këtij procesi të shtimit të degëve kemi gjeneruar $m - n$ vrima dhe dimensionin i $\ker \partial_1$ (dhe β_1) është $m - n$.

6. Për çdo degë e_j që nuk është në pemën K_0 , ekziston një rrugë (zinxhir) c_j në pemë që lidh kulmet x_j dhe y_j . Atëherë cikli $e_j + c_j$ është një 1-zinxhir i mbyllur dhe $[e_j, c_j]$ për $j \in \{n+1, \dots, m\}$ formojnë një bazë për hapësirën $H_1(K; \mathbb{F})$.

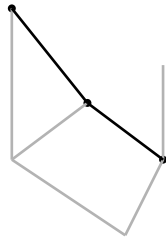
Në vijim është paraqitur një shembull ilustrues i kësaj procedure.



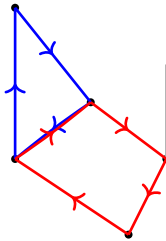
Ky është një kompleks i simplekseve K , i cili paraqet një graf të lidhur në rrafsh.



Degët e pemës me ngjyrë më të theksuar përbëjnë pemën maksimale K_0 , ndërsa mbështjellësi formohet nga degët e kësaj peme. Në këtë mënyrë, vizualisht paraqiten hapat 1–3.



Këtu degët që janë të paraqitura me ngjyrë më të theksuar nuk kontribuojnë në pemën maksimale, duke ilustruar kështu hapin 4.



Kjo figurë tregon qartë ciklet (me ngjyra), të cilat përbëjnë një bazë të grupit H_1 . Në këtë kontekst, grafi i paraqitur ka dy vrime, që do të thotë se dimensiononi i homologjisë së parë (β_1) është 2, që tregon numrin e vrimave që gjeneron ky graf. Pra, këtu përshkruhen vizualisht hapat 5-6.

3.9 Homologjia e sipërfaqeve

Pohim 3.9.1. *Le të jetë K një trekëndëshzëzim (triangulum) i një sipërfaqeje të mbyllur dhe të lidhur të orientuar. Për çdo fushë \mathbb{F} kemi:*

$$H_2(K; \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}.$$

Vërtetim. Pasi K është e orientuar do të thotë se ekziston një zgjedhje e orientimeve për të gjithë trekëndëshat e K . Le të fiksojmë një orientim të tillë për to.

1. Nga struktura e sipërfaqes kemi se një brinjë mund t'i përkasë vetëm një ose dy trekëndëshave.
2. Në një sipërfaqe të mbyllur çdo brinjë duhet t'u përkasë saktësisht dy trekëndëshave.
3. Nga orientimi i trekëndëshave kemi se nëse dy trekëndësha kanë një brinjë të përbashkët atëherë orientimet e indukuara mbi atë brinjë janë të kundërta.

Le të jetë α zinxhiri që merret si shumë formale e të gjithë trekëndëshave të K , me orientim të fiksuar. Duke përdorur pikat 1-3 si më sipër, çdo brinjë shfaqet në $\partial\alpha$ dy herë, një herë me çdo orientim (shihni figurën 3.19) dhe kështu $\partial\alpha = 0$ që do të thotë se α është një cikël. Duke pasur parasysh se imazhi i ∂_3 është trivial α përfaqëson një klasë homologjije jotriviale.

Ndërsa sa herë që një 2-cikël β përmban një term $+\sigma$ ku σ është një trekëndësh i orientuar nga pikat 2 dhe 3 kemi se të gjitha simplekset e orientuara që kanë një brinjë me σ shfaqen gjithashtu në α me koeficient 1.

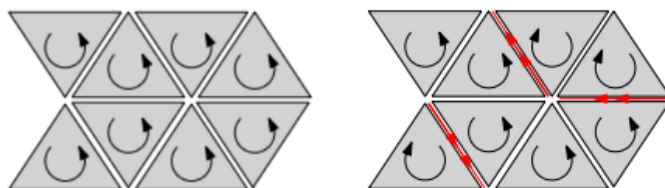


Figura 3.19: Pjesa e majtë: Kufiri i një zinxhiri që përbëhet nga të gjithë trekëndëshat e orientuar në mënyrë kompatible të një sipërfaqeje pa kufi është zero, pasi orientimet e induktuara mbi brinjë anulojnë njëra-tjetrën. Pjesa e djathtë: Kufiri i një zinxhiri që përbëhet nga një koleksion i trekëndëshave të sipërfaqes pa kufi të orientuar përmban çdo brinjë mes dy trekëndëshave dy herë.

Nëse σ shfaqet në termin $\lambda\sigma$ për disa $\lambda \in \mathbb{F}$ e përsërisim të njëjtin argument për zinxhirin e ndarë nga λ . Duke zgjeruar këtë përfundim në mënyrë induktive për fqinjët e mëtejshëm, arrijmë në të gjitha trekëndëshat, pasi K është i lidhur dhe kështu kemi që $\beta = \alpha$.

□

Ky pohim nuk vlen për sipërfaqet që kanë kufij. Po të ekzistonte një 2-cikël jotrivial në këtë rast, argumenti i përdorur në vërtetimin e pohimit do të tregonte se ky cikël do të ishte shuma e orientuar e të gjithë trekëndëshave (ndoshta e shumëzuar me një faktor të vetëm jotrivial $\lambda \in \mathbb{F}$). Duke qenë se prezenca e një kufiri të shumëfaqëshit nënkupton ekzistencën e të paktën një brinje që i përket vetëm një trekëndëshi, një trekëndësh i tillë (i shumëzuar me λ) do të shfaqej në kufirin e ciklit, që është një kontradiksion.

Homologjia e dytë e një shumëfaqëshi të lidhur me kufi pra është gjithmonë triviale. Rasti i sipërfaqeve jo të orientuara është situata e parë ku zgjedhja e koeficientëve ka rëndësi.

Pohim 3.9.2. *Le të jetë K një triangulim i një sipërfaqeje të mbyllur dhe të lidhur jo të orientuar. Atëherë $H_2(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ dhe $H_2(K; \mathbb{F}) \cong 0$ për çdo $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$.*

Vërtetim. Ngjashëm si në vërtetimin e pohimit paraprak fakti që K është një sipërfaqe do të thotë se nëse një 2-cikël α përmban një term $+\sigma$ për ndonjë trekëndësh të orientuar σ atëherë përmban gjithashtu një term $+\sigma'$ për çdo trekëndësh të orientuar σ' që ka një brinjë të përbashkët me σ .

Pasi K është e lidhur kjo do të thotë se α është shuma e të gjithë trekëndëshave të orientuar. Mirëpo pasi K është jo e orientueshme, nuk ka një orientim të njëjtë mbi trekëndëshat dhe kështu disa brinjë do të shfaqen me koeficient 2 në kufi, shiko figurën 3.19. Prandaj nëse $0 \neq 2$, kufiri është jotrivial dhe 2-cikli i supozuar nuk ka një kufi bosh që është një kontradiksion. Kështu që 2-cikli i vetëm është cikli trivial.

Mirëpo nëse $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ kufiri i marrë është zero dhe kështu α është cikli i vetëm jotrivial. Andaj $H_2(K; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Shembull 3.9.3. Do të shohim një shembull ku zgjedhja e koeficientëve bën ndryshime në llogaritjet e homologjisë 1-dimensionale e kjo hapësirë është shishja e Klein-it, te cilën do ta shënojmë me K , shih figuren 3.20. Triangulimi i saj është dhënë në figurën 3.21.

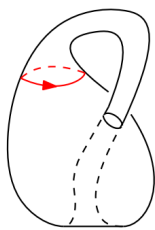


Figura 3.20: Shishja e Klein-it.

Kemi që $\beta_0 = 1$ pasi K është e lidhur. Megjithatë numri i dytë i Bett-it i kësaj sipërfaqeje të mbyllur varet nga koeficientët për shkak se është jo e orientuar.

- $\beta_2(K; \mathbb{Z}_2) = 1$.
- Për $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$, $\beta_2(K; \mathbb{F}) = 0$.

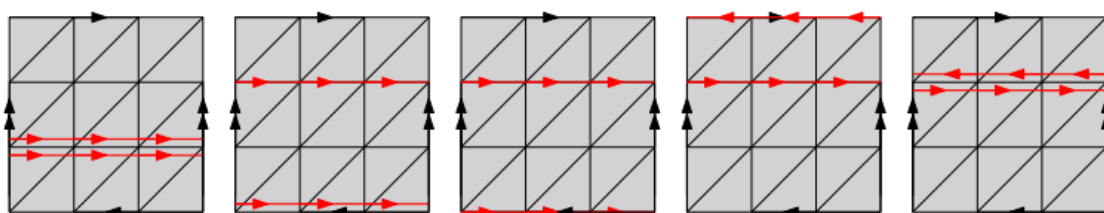


Figura 3.21: Triangulimi i shishes së Klein-it.

Numrat e Bett-it mund të llogarisim gjithashtu përmes reduktimit të matricave. Në vend që t'i llogarisim, ne do të tregojmë arsyen gjeometrike për ndryshimin e β_1 në varësi të koeficientëve. Shpjegimi do të bazohet në figurën 3.21. Në secilën nga pesë pjesët e figurës jepet një triangulim i K . Shigjetat e zeza tregojnë drejtimin në të cilin bëhen identifikimet. Një vijë horizontale e kuqe e vetme e orientuar përfaqëson një cikël α , i cili gjeneron dimensionin shtesë të $H_2(K; \mathbb{Z}_2)$. Ajo është paraqitur gjithashtu në figurën 3.20. Kemi se $[\alpha]$ është homologjikisht jozero atëherë dhe vetëm atëherë kur koeficientët janë nga \mathbb{Z}_2 . Supozojmë se vlen: $2[\alpha] = 0$ në homologjinë 1-dimensionale. Për të vërtetuar supozimin shohim se pjesa e majtë e figurës 3.21 përmban dy kopje të ciklit α të paraqitura disi të ndara nga njëra-tjetra. Klasa homologjike përkatëse nuk ndryshon nëse ne lëvizim (nënkuptojmë një ndryshim homotopik) secilën nga kopjet e α -së veçmas.

Atëherë le t'i lëvizim si në figurë:

- lëvizim kopjen e sipërme pak më lart.
- lëvizim kopjen e poshtme në fund të figurës. Për shkak të orientimit të përmbysur ky zinxhir shfaqet më pas në pjesën e sipërme të katrorit me një orientim të përmbysur. Duke e lëvizur këtë përfaqësues më poshtë pranë kopjes së parë të α , vërejmë se këto dy kopje e anulojnë njëra-tjetrën pasi ato përbëhen nga të njëjtat brinje por me orientim të kundërtë.

Prandaj supozimi vlen, pra $2[\alpha]$ është klasë e homologjisë triviale. Në varësi të koeficientëve që llogarisim kemi:

- Nëse $\mathbb{F} \not\cong \mathbb{Z}_2$ atëherë mund të pjestojmë barazimin $2[\alpha] = 0$ me 2 dhe fitojmë se $[\alpha] = 0 \in H_1(K; \mathbb{F})$.
- Nëse $\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}_2$ atëherë nuk mund të e pjestojmë barazimin $2[\alpha] = 0$ me 2 pasi $2 = 0$. Kemi që $[\alpha] \neq 0 \in H_1(K; \mathbb{Z}_2)$, dhe rrjedh se α jep një dimension shtesë në $H_1(K; \mathbb{Z}_2)$.

Kapitulli 4

Homologjia singulare

Në dimensionet e vogla shpesh kemi një intuitë për të dalluar kur dy hapësira topologjike janë të ngjashme. Kjo ide formalizohet përmes homeomorfizmit i cili ruan strukturën topologjike të hapësirave. Një pyetje e rëndësishme është nëse grupet e homologjisë ruhen nën një homeomorfizëm dhe përgjigjja është pozitive. Grupet e homologjisë të hapësirave homeomorfe janë izomorfe.

Mirëpo krahasimi i grupeve të homologjisë mund të jetë i vështirë, veçanërisht kur hapësirat nuk paraqiten në forma të ngjashme, si në rastin e komplekseve të simplekse. Andaj do paraqesim homologjinë singulare, një mënyrë më të përgjithshme që bazohet në funksione të vazhdueshme nga simplekset në hapësira topologjike. Kjo metodë mund të aplikohet për çdo hapësirë, pavarësisht strukturës që ka dhe ofron një metodë për të analizuar grupe e homologjisë në mënyrë më të përgjithshme.

Përmbajtja e këtij kapitulli bazohet në masë të konsiderueshme në librat A. Hatcher [10], T.Dey dhe Y.Wang [4], shënimet e M.Gualtieri [9], R.Haugsgeng [11] si dhe artikullin e P.Nadathur [14].

4.1 Delta komplekset

Pas përkufizimit të komplekseve të simplekseve, është e natyrshme të kërkojmë një version më të përgjithshëm dhe më fleksibil të tyre, veçanërisht kur duam të modelojmë hapësira që nuk ndjekin rregullat e rrepta të një kompleksi të simplekseve. Pikërisht për këtë arsye do të përkufizojmë Δ -komplekset.

Përkufizimi i parë është dhënë nga Eilenberg–Zilber në vitin 1950, duke i emërtuar si komplekse të semisimplekseve, pasi disa nga kushtet strikte të simplekseve janë zbutur, për

shembull mundet që një brinjë ose faqe e një simpleksi të paraqitet më shumë se një herë, ndonjëherë edhe me orientime të ndryshme. Kjo e bën ndërtimin topologjik më të thjeshtë, por pa e humbur strukturën. Në literaturë, më vonë janë emërtuar si Δ -komplekse për të thjeshtuar shënimin.

Torusin dhe shishen e Klein-it mund t'i përftojme duke ngjitur brinjët e një katrori sipas shigjetave, siç paraqitet në figurën 4.1.

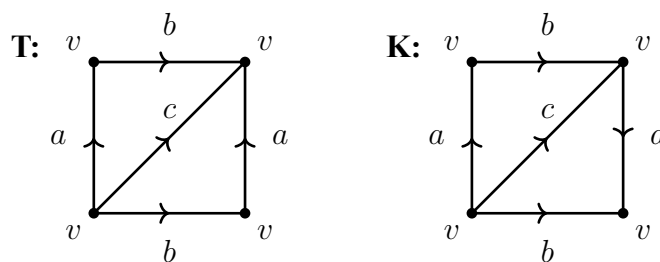


Figura 4.1: Δ -komplekset për torusin T dhe sipërfaqen e Klein-it K .

Mund ta ndajmë katrorin në dy trekëndësha përmes diagonales, prandaj këto sipërfaqe mund të ndërtohet nga dy trekëndësha duke identifikuar brinjët në çifte. Në mënyrë të ngjashme, një shumëkëndësh me çfarëdo numri brinjesh mund të ndahet në trekëndësha përmes ndarjeve në diagonale, kështu që të gjitha sipërfaqet e mbyllura mund të ndërtohen nga trekëndësha përmes identifikimit të brinjëve të tyre, shih figurën 4.2. Kjo tregon se trekëndëshi shërben si një bllok ndërtimi nga i cili mund të ndërtohen të gjitha sipërfaqet. Duke përdorur vetëm trekëndësha, mund të ndërtojmë gjithashtu një klasë të hapësirave dy-dimensionale, të cilat nuk janë sipërfaqe në kuptimin e zakonshëm, nëse lejojmë që më shumë se dy anë të identifikohen njëkohësisht.

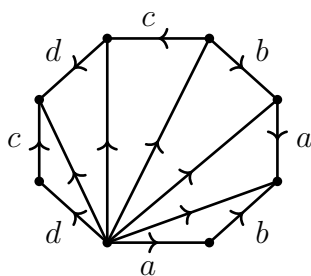


Figura 4.2: Δ -kompleksi për shumëkënshin.

Ideja e një Δ kompleksi është të përgjithësojë ndërtimet e tilla në çdo dimension. Analogu në dimensionin n i një trekëndëshi është n -simpleksi.

Një strukturë e Δ -kompleksit mbi një hapësirë X është koleksioni i pasqyrimeve $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$, ku n varet nga indeksi α , ashtu që:

- i) Ngushtimi $\sigma_\alpha|_{\Delta^n \setminus \partial\Delta^n}$ është injektiv dhe çdo pikë e X ndodhet saktësisht në imazhin e vetëm njërit prej këtyre ngushtimeve.
- ii) Çdo ngushtim i σ_α te një faqe e Δ^n është një nga pasqyrimet $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$. Këtu po e identifikojmë faqen e Δ^n me Δ^{n-1} përmes homeomorfizmit linear kanonik që ruan renditjen e kulmeve.
- iii) Një nënbashkësi $A \subset X$ është e hapur në X atëherë dhe atëherë nëse $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ është i hapur në Δ^n për secilën σ_α .

Kushti i fundit shmang rastet triviale, ku çdo pikë e hapësirës X konsiderohet si një kulm i veçantë. Dekompozimet e mëhershme të torusit dhe shishes së Klein-it në dy trekëndësha, tre brinjë dhe një kulme përcaktojnë struktura Δ -kompleksesh me gjithsej gjashtë pasqyrime σ_α për torusin dhe shishen e Klein-it. Orientimet e brinjëve në figurat përkatëse janë në përputhje me një renditje unike të kulmeve të secilit simpleks dhe kjo renditje përcakton mënyrën se si ndërtohen pasqyrimet σ_α .

Nga iii) kemi se hapësira X mund të ndërtohet si një hapësirë herës e një koleksioni të simplekseve disjunkte Δ_α^n , një për secilën pasqyrim $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$. Kjo hapësirë herës fitohet duke identifikuar secilën faqe të një Δ_α^n me Δ_β^{n-1} , që i korrespondon ngushtimit σ_β të σ_α në faqen përkatëse, ashtu siç përshkruhet në kushtin (ii). Kjo hapësirë ndërtohet në mënyrë induktive: duke filluar me një bashkësi diskrete të kulmeve, pastaj duke bashkangjitur brinjë për të formuar një graf, më pas duke bashkangjitur 2–simplekset mbi këtë graf, e kështu me radhë. Nga kjo pikëpamje, të dhënat që përshkruajnë një Δ -kompleks mund të përfaqësohen në mënyrë tërësisht kombinatorike si koleksione të simplekseve Δ_α^n për çdo n , së bashku me funksione që i asociojnë çdo faqe të një n -simpleksi Δ_α^n me një simpleks $(n-1)$ -dimensional Δ_β^{n-1} .

4.2 Përkufizimi i homologjisë singulare

Në kapitullin e kaluar kemi parë se si mund t'i studiojmë format e ndryshme të hapësirave përmes homologjisë simplekse, duke i ndërtuar ato si komplekse të përbëra nga kulme, brinjë, trekëndësha e më tej. Kjo është një metodë elegante për të analizuar strukturën topologjike të një hapësire përmes ndërtimeve të rregullta dhe të kontrolluara mirë.

Një nga kufizimet themelore të homologjisë simplekse është mënyra se si lejohet të pasqyrojmë një simpleks në një hapësirë tjetër: pasqyrimet duhet të jenë simplekse, ku kulmet dërgohen në kulme dhe pasqyrimet janë të ndërtuara në mënyrë që respektojnë strukturën simplekse – pra nuk lejohet të dërgosh një kulm në mesin e një brinje, apo të përdorësh një pasqyrim të çrregullt.

Për të kuptuar më mirë këtë kufizim, le të marrim një trekëndësh si një 2- simpleks. Në një pasqyrim të simpleksev, një kulm duhet të dërgohet në një kulm tjetër të kompleksit përkatës. Nuk lejohet që ai të dërgohet në mesin e një brinje apo në brendësinë e trekëndëshit, sepse këto pika nuk janë kulme në kompleksin e simplekseve që po përdorim, shih figurën 4.3.

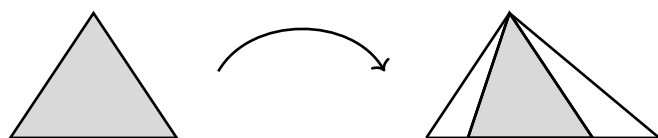


Figura 4.3: Kundërshebull i pasqyrimin të simplekseve.

Kjo kufizon lirinë mbi pasqyrimet. Në shumë raste, mund të kemi një pasqyrim që është i vazhdueshëm dhe topologjikisht domethënës, por nuk lejohet nga rregullat e strukturës të simplekseve. Kjo na shtyn të prezantojmë një teori më të fleksibile pra homologjinë singulare.

Në vend që të kufizohemi te ndërtimet e rregullta, përdorim simplekse standarde dhe lejojmë çdo funksion të vazhdueshëm prej tyre në hapësirën që duam të studiojmë. Nuk ka më kufizime, çdo pasqyrim i vazhdueshëm lejohet.

Kjo sjell me vete një ndryshim thelbësor pasi derisa në homologjinë simplekse mund të ketë vetëm një numër të fundmë pasqyrimesh (sepse ekziston vetëm një numër i fundmë i mënyrave për të dërguar kulmet në kulme), në homologjinë singulare numri i pasqyrimeve është i pafund. Ka pafund mënyra për të pasqyruar një simpleks në një hapësirë, për aq kohë sa pasqyrimi është i vazhdueshëm. Pra kemi mundësi për të përfshirë forma të çrregullta, hapësira që nuk kanë ndërtim simpleksesh.

Një simpleks singular n në një hapësirë X është një funksion i vazhdueshëm $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Le të jetë $C_n(X)$ grupi abelian i lirë me bazë bashkësinë e n -simplekseve singulare në X . Elementet e $C_n(X)$ i quajmë n -zinxhirë ose më saktë n -zinxhirë singular të cilët janë shuma formale $\sum_i n_i \sigma_i$ për $n_i \in \mathbb{Z}$ dhe $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$.

Operatori i kufrit $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ definohet me formulën e ngjashme si më

parë tek homologjia simplekse:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma[[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Në këtë formulë, $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ përfaqëson faqen i -të të simpleksit standard Δ^n , e cila fitohet duke larguar kulmin v_i . Kjo faqe identifikohet me simpleksin Δ^{n-1} përmes përfshirjes kanonike që e largon kulmin e i -të, duke ruajtur renditjen e kulmeve.

Simboli $\sigma[[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ nënkupton kompozimin e funksioneve $\sigma \circ \delta_i$, ku $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ është përfshirja që dërgon Δ^{n-1} në faqen përkatëse të Δ^n . Rezultati është një funksion i vazhdueshëm $\Delta^{n-1} \rightarrow X$ pra një $(n-1)$ -simpleks singular.

Shpesh e shkruajmë operatorin e kufirit ∂_n nga $C_n(X)$ në $C_{n-1}(X)$ thjesht si ∂ . Rezultati analog i Teoremës 3.3.2 vlen edhe tek simplekset singulare, andaj $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ ose $\partial^2 = 0$, kështu mund të përkufizojmë grupin homologjik singular:

$$H_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\text{Im} \partial_{n+1}}.$$

Nga vetë mënyra si përkufizohen, grupet e homologjisë $H_n(X)$ janë invariante topologjike, pra nëse X dhe Y janë homeomorfe, atëherë kemi izomorfizmin $H_n(X) \cong H_n(Y)$ për çdo $n \geq 0$. Ky fakt në homologjinë simplekse nuk është kaq i drejtpërdrejtë.

Nga ana tjetër duke qenë se grupet $C_n(X)$ janë të mëdha, numri i simplekseve singulare n në X zakonisht është i panumrueshëm, nuk është fare e qartë që për një Δ -kompleks X me një numër të fundmë simplekseve grupet homologjike $H_n(X)$ duhet të jenë domosdoshmërisht të gjeneruara në mënyrë të fundme për çdo n ose që $H_n(X)$ duhet të jetë zero për n më të madh se dimensionin e X , dy veti që janë triviale për grupet e homologjisë simplekse $H_n^\Delta(X)$.

Pra edhe pse homologjia singulare duket më e përgjithshme dhe më abstrakte sesa homologjia simplekse, në të vërtetë ajo mund të shihet si një rast i veçantë i homologjisë simplekse përmes konstruktimit në vazhdim.

Për çdo hapësirë topologjike të përgjithshme X , mund të ndërtojmë kompleksi singular $S(X)$. Ky kompleks është një Δ -kompleks, ku secili n -simpleks singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ korrespondon me një n -simpleks Δ_σ^n në $S(X)$.

Lidhjet mes këtyre n -simplekseve janë të përcaktuara në këtë mënyrë: çdo Δ_σ^n ngjitet në kufijtë e tij, të cilët janë $(n-1)$ -simplekse që përfaqësojnë restriksionet e pasqyrimin σ në faqet maksimale të simpleksit standard Δ^n . Nga vetë përkufizimi, grupet e homologjisë simplekse të kompleksit $S(X)$, të shënuara me $H_n^\Delta(S(X))$, janë izomorfe me grupet e

homologjisë singulare $H_n(X)$ të hapësirës X , për çdo $n \in \mathbb{N}$. Pra kemi

$$H_i(X) := H_i^\Delta(S(X)).$$

Ky rezultat tregon se homologjia singulare mund të konsiderohet si një rast i veçantë i homologjisë simplekse, ku hapësira topologjike X zëvendësohet me Δ -kompleksin $S(X)$.

Megjithatë, kompleksi singular $S(X)$ zakonisht është shumë i madh dhe përmban një numër të panumërt simplekse në secilin dimension. Kjo e bën modelin të komplikuar dhe të papërshtatshëm për llogaritje të drejtpërdrejta. Arsyeja qëndron në faktin se çdo pasqyrim singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ gjeneron një simpleks unik në $S(X)$ dhe numri i këtyre pasqyrimeve është zakonisht shumë i madh, madje edhe për hapësira relativisht të thjeshta.

Ciklet në homologjinë singulare janë të përkufizuara në mënyrë algjebrike, por mund t'u bëjmë një interpretim më gjeometrik përmes ndërtimit të Δ -komplekseve të fundme të lidhura me to. Për ta parë këtë më qartë, le të konsiderojmë një n -zinxhir singular që mund të shkruhet në formën

$$\xi = \sum_i \varepsilon_i \sigma_i,$$

ku $\varepsilon_i = \pm 1$ dhe σ_i janë n -simplekse singulare, duke lejuar përsëritjen e simplekseve σ_i në këtë shumë. Kur llogarisim kufirin $\partial\xi$, i cili është një shumë e $(n-1)$ -simplekseve singulare me shenjat përkatëse ± 1 , ndodh që disa çifte të këtyre simplekseve mund të anulohen njëra-tjetrën. Këto çifte përbëhen nga dy $(n-1)$ -simplekse identike që shfaqen me shenja të kundërta në shprehjen e $\partial\xi$. Duke zgjedhur një koleksion maksimal të këtyre çifteve që anulohen, mund të ndërtojmë një Δ -kompleks të rendit n , që e shënojmë me K_ξ . Ky kompleks ndërtohet duke marrë një kopje të simpleksit standard Δ^n për secilën prej simplekseve σ_i në ξ , dhe më pas duke ngjitur faqet maksimale të këtyre simplekseve në çifte, sipas mënyrës se si ato anulohen në kufi. Ky proces bazohet në informacionin që na jep operatori ∂ dhe na lejon të ndërtojmë një hapësirë të re topologjike K_ξ .

Pasqyrimet e simplekseve $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ indukojnë pasqyrimin $f_\xi : K_\xi \rightarrow X$. Nëse ξ është një cikël (dmth. $\partial\xi = 0$), atëherë të gjitha faqet maksimale të simplekseve Δ_i^n identifikohen në çifte. Si rrjedhim, kompleksi K_ξ është një hapësirë që në shumë pika duket si hapësira e zakonshme \mathbb{R}^n , përveç ndoshta në skeletin e rendit më të ulët.

Në fakt, K_ξ është lokalisht homeomorf me \mathbb{R}^n në çdo pikë që nuk ndodhet në skeletin $(n-2)$ -dimensional të tij, që e shënojmë me K_ξ^{n-2} . Kjo do të thotë se jashtë skeletit më të ulët, hapësira K_ξ ka strukturë të një shumëfaqëshi të zakonshëm.

Orientimi i secilit simpleks në K_ξ mund të përcaktohet duke marrë shenjën përkatëse të σ_i . Prandaj hapësira $K_\xi \setminus K_\xi^{n-2}$ është një shumëfaqësh i orientuar.

Mund të tregohet gjithashtu se edhe në pikat që ndodhen në interiorin e $(n - 2)$ -simplekseve hapësira K_ξ është prapë një shumëfaqësh. Megjithatë për pikat që ndodhen në skeletin $(n - 3)$ ose më të ulët K_ξ mund të mos ketë strukturën e një shumëfaqëshi. Pra, pikat joshumëfaqëshe të K_ξ ndodhen vetëm në skeletin $(n - 3)$ -dimensional. Ky interpretim na jep një mënyrë të qartë për të parë klasat e homologjisë nëpërmjet objekteve gjeometrike:

- Elementet e $H_1(X)$ përfaqësohen nga koleksione ciklesh të mbyllura të orientuara në X .
- Elementet e $H_2(X)$ përfaqësohen nga sipërfaqe të mbyllura dhe të orientuara të pasqyruara në X përmes një pasqyrimi f_ξ .

Në përfundim, kjo analizë tregon që ciklet në homologjinë singulare nuk janë vetëm shuma abstrakte funksionesh, por ato përfaqësojnë objekte të mirëfillta gjeometrike që ngjasojnë me shumëfaqësh të mbyllur. Kjo lidhje mes përshkrimit algjebrik dhe strukturës gjeometrike është një nga arsyet pse homologjia është kaq e rëndësishme në topologjinë algjebrike.

4.3 H_0 dhe H_1

Pohim 4.3.1. *Në lidhje me ndarjen e hapësirës X në komponentët e saj të lidhshmërisë përmes rrugëve X_α , grupi homologjik $H_n(X)$ është izomorf me shumën direkte të grupeve homologjike të secilit komponent. Kështu, kemi izomorfizmin:*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_n(X_\alpha).$$

Vërtetim. Meqenëse imazhi i çdo simpleksi singular është i lidhur sipas rrugëve, çdo n -zinxhir singular gjendet plotësisht brenda një komponenti të lidhshmërisë së X . Prandaj, grupi $C_n(X)$ mund të shkruhet si shumë direkte e nëngrupeve $C_n(X_\alpha)$, ku X_α janë komponentët e lidhshmërisë së X :

$$C_n(X) = \bigoplus_{\alpha} C_n(X_\alpha).$$

Operatorët e kufirit ∂_n ruajnë këtë ndarje duke i dërguar $C_n(X_\alpha)$ në $C_{n-1}(X_\alpha)$ dhe kështu $\ker \partial_n$ dhe $\text{Im} \partial_{n+1}$ ndahen gjithashtu në mënyrë të ngjashme si shuma direkte. Kjo bën që grupet e homologjisë të ndahen po ashtu andaj kemi $H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_n(X_\alpha)$.

Pohim 4.3.2. Nëse hapësira X është joboshe dhe e lidhur sipas rrugëve, atëherë:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Prandaj për çdo hapësirë topologjike X grupi $H_0(X)$ është një shumë direkte e kopjeve të \mathbb{Z} , një për secilin komponent të lidhshmërisë përmes rrugëve të X .

Vërtetim. Nga përkufizimi kemi se $H_0(X) = C_0(X) / \text{Im } \partial_1$ pasi $\partial_0 = 0$.

Përkufizojmë një homomorfizëm $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Ky homomorfizëm është qartë surjektiv nëse X është joboshe.

Do të tregojmë se $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ kur X është e lidhur sipas rrugëve dhe si rrjedhim ε indukon një izomorfizëm $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Për të vërtetuar këtë, vërejmë fillimisht se $\text{Im } \partial_1 \subseteq \ker \varepsilon$, pasi për një 1-simpleks singular $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ kemi: $\varepsilon \partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|[v_1] - \sigma|[v_0]) = 1 - 1 = 0$.

Për të treguar se $\ker \varepsilon \subseteq \text{Im } \partial_1$, supozojmë që: $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = 0$, pra $\sum_i n_i = 0$. Këtu σ_i janë 0-simplekse singulare, të cilat korrespondojnë me pika në X .

Zgjedhim një pikë baze(basepoint) $x_0 \in X$ dhe për secilën σ_i zgjedhim një rrugë

$\tau_i : I \rightarrow X$ që lidh x_0 me $\sigma_i(v_0)$. E shohim τ_i si një 1-simpleks singular dhe e përcaktojmë σ_0 të jetë 0-simpleksi me imazh x_0 . Atëherë kufiri i τ_i është: $\partial_1(\tau_i) = \sigma_i - \sigma_0$. Kështu, $\partial_1(\sum_i n_i \tau_i) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i$ sepse $\sum_i n_i = 0$. Andaj $\sum_i n_i \sigma_i \in \text{Im } \partial_1$ dhe kështu $\ker \varepsilon \subseteq \text{Im } \partial_1$.

Përfundimisht $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ ndaj ε indukon një izomorfizëm: $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Pohim 4.3.3. Nëse X është një pikë atëherë kemi që $H_n(X) = 0$ për $n > 0$ dhe $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Vërtetim. Në këtë rast ekziston vetëm një n -simpleks singular σ_n për çdo n dhe $\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$, është një shumë e $n + 1$ termave. Kjo shumë është zero kur n është tek dhe σ_{n-1} kur n është çift, $n \neq 0$. Kështu kemi kompleksin e zinxhirëve:

$$\dots \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

ku aplikimet e kufirit janë alternime izomorfizmash dhe pasqyrimesh triviale, përveç në operatorin e fundit të kompleksit. Grupet e homologjisë së këtij kompleksi janë triviale përveç dimensionit zero $H_0 \cong \mathbb{Z}$.

Teoremë 4.3.4. [Teorema e Hurewicz] Pasqyrimi natyral $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ i dhënë duke e konsideruar një lak si një 1-cikël singular është një homomorfizëm i grupeve. Nëse

X është e lidhur sipas rrugëve, atëherë h indukon një izomorfizëm:

$$\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] \rightarrow H_1(X),$$

ku $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ është nëngrupi komutator i grupit $\pi_1(X)$. Prandaj $H_1(X)$ është abelianizimi i grupit fundamental $\pi_1(X)$.

Vërtetim. Në bashkësinë e rrugëve $f, g : I \rightarrow X$ me të njëjtën pikë fillimi dhe përfundimi, përkufizojmë relacionin \sim si më poshtë:

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists \tau : \Delta^2 \rightarrow X \text{ e tillë që } \partial\tau = f - g.$$

Ky relacion është relacion i ekuivalencës pasi vlejnjë vetitë:

- Vetia refleksive: Për çdo rrugë f , kemi $f - f = 0$, që është kufiri i 2-zinxhirit zero. Pra, mund të zgjedhim $\tau = 0$ ashtu që $\partial\tau = 0 = f - f$. Prandaj $f \sim f$.
- Vetia simetrike: Supozojmë se $f \sim g$, pra ekziston një 2-zinxhir τ i tillë që $\partial\tau = f - g$. Atëherë, duke marrë $-\tau$, kemi:

$$\partial(-\tau) = -\partial\tau = -(f - g) = g - f,$$

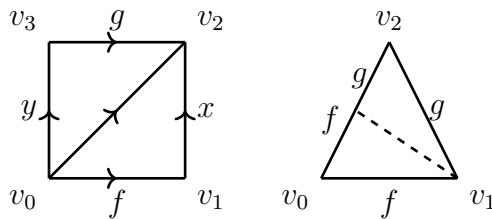
pra $g \sim f$.

- Vetia transitive: Supozojmë se $f \sim g$ dhe $g \sim h$, pra ekzistojnë τ_1, τ_2 të tillë që: $\partial\tau_1 = f - g$, $\partial\tau_2 = g - h$. Le të jetë $\tau = \tau_1 + \tau_2$, atëherë:

$$\partial\tau = \partial\tau_1 + \partial\tau_2 = (f - g) + (g - h) = f - h,$$

prandaj $f \sim h$.

Rikujtojmë se homotopinë e rrugëve f e g e shënojmë $f \simeq g$.



Disa veti të rëndësishme janë:

1. Nëse f është një rrugë konstante atëherë $f \sim 0$ pasi $H_1(*) = 0$.
2. $f \simeq g \Rightarrow f \sim g$ pasi homotopia $I \times I \rightarrow X$ mund të shkruhet si një 2-zinxhir singular (me dy 2-simplekse singulare, duke e ndarë katrorin përgjatë diagonales) me kufi $f - g + x - y$ dhe pasi rrugët konstante x, y janë kufij atëherë edhe $f - g$ është kufi.
3. $f \cdot g \sim f + g$ sepse mund të përkufizojmë një 2-zinxhir singular me kufi $f + g - f \cdot g$ ashtu që $\sigma : [v_0, v_1, v_2] \rightarrow X$ të jetë kompozim i projekcionit ortogonal në segmentin $[v_0, v_2]$ i ndjekur nga $f \cdot g : [v_0, v_2] \rightarrow X$.
4. $f^{-1} \sim -f$ sepse $f + f^{-1} \sim f \cdot f^{-1} \sim 0$.

Duke përdorur këto veti, përkufizojmë pasqyrimin:

$$h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

i cili dërgon klasën $[f]$ në klasën e homologjisë së 1-zinxhirit të përfaqësuar nga f . Tani, tregojmë se h është homomorfizëm i grupeve. Në π_1 , veprimi i grupit është kompozimi i rrugëve: $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Nga veti (3) më sipër kemi se $[f \cdot g] = [f] + [g]$. Prandaj,

$$h([f] \cdot [g]) = h([f \cdot g]) = [f \cdot g] = [f] + [g] = h([f]) + h([g])$$

pra h është homomorfizëm.

Vërejmë që pasi $H_1(X)$ është grup abelian prandaj komutatorët në $\pi_1(X)$ përfshihen në bërthamën e homomorfizmit h :

$$[\pi_1(X), \pi_1(X)] \subseteq \ker h.$$

Prandaj h kalon në abelianizim dhe indukon një homomorfizëm

$$\bar{h} : \pi_1^{\text{ab}}(X) \rightarrow H_1(X).$$

Në drejtimin e kundërt, ndërtojmë funksionin $\psi : H_1(X) \rightarrow \pi_1^{\text{ab}}(X)$ si vijon: për një 1-cikël të mbyllur f (d.m.th., $\partial f = 0$) zgjedhim një rrugë γ nga x_0 në fillimin e f (pra $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = f(0)$) dhe përcaktojmë:

$$\psi([f]) = [\gamma f \gamma^{-1}] \in \pi_1^{\text{ab}}(X).$$

Ky funksion është mirë i përcaktuar pasi ndryshimi i γ ndryshon përmes komutatorëve, të cilët bëhen zero në abelianizim. Mbetet të tregojmë që $\psi \circ \bar{h} = \text{id}_{\pi_1^{\text{ab}}(X)}$ dhe $\bar{h} \circ \psi = \text{id}_{H_1(X)}$.

Për çdo $[f] \in \pi_1^{\text{ab}}(X)$, kemi $\psi(\bar{h}([f])) = \psi([f]) = [f]$ sepse f është lak me bazë x_0 dhe nuk ka nevojë për ndryshim baze. Për $[f] \in H_1(X)$, me rrugë γ nga x_0 te baza e f , kemi

$$\bar{h}(\psi([f])) = \bar{h}([\gamma f \gamma^{-1}]) = [\gamma] + [f] + [-\gamma] = [f]$$

sepse $[\gamma^{-1}] = [-\gamma]$ dhe $[\gamma] + [-\gamma] = 0$ në $H_1(X)$. Pra \bar{h} dhe ψ janë funksionet inverse të njëri-tjetrit andaj kemi izomorfizmin:

$$\pi_1^{\text{ab}}(X) \cong H_1(X).$$

Vërejtje 4.3.5. Në dimensione më të larta, teorema e Hurewicz-it tregon se nëse hapësira X është $(n-1)$ -e lidhur për $n \geq 2$ (pra $\pi_k(X) = 0$ për çdo $k < n$) atëherë $\pi_n(X)$ është izomorfe me $H_n(X)$.

Shembull 4.3.6. Në këtë shembull do të gjejmë grupet e homologjisë të rrethit S^1 . Rrethi S^1 është i lidhur dhe jobosh, andaj nga Pohimi 4.3.2 kemi se:

$$H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Grupi fundamental i rrethit është $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Duke aplikuar teoremën e Hurewicz-it, grupi i parë i homologjisë së rrethit është abelianizimi i grupit fundamental, pra:

$$H_1(S^1) \cong \pi_1^{\text{ab}}(S^1) \cong \mathbb{Z}^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}.$$

Gjë që pasqyron faktin që S^1 ka një vrimë 1-dimensionale.

Shembull 4.3.7. Do të njehsojmë grupet e homologjisë së hapësirës $X = S^1 \times (\{0\} \cup \{1\})$. Pasi $X = S^1 \times (\{0\} \cup \{1\}) = S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\}$. Andaj nga pohimi 4.3.1 kemi se:

$$H_i(S^1 \times (\{0\} \cup \{1\})) \cong H_i(S^1 \times \{0\}) \oplus H_i(S^1 \times \{1\}) \cong H_i(S^1) \oplus H_i(S^1).$$

Nga shembulli 3.5.3 kemi se grupet e homologjisë së rrethit janë:

$$H_i(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{për } i = 0, 1, \\ 0 & \text{për } i > 1, \end{cases}$$

andaj kemi se:

$$H_i(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{për } i = 0, 1, \\ 0 & \text{për } i > 1. \end{cases}$$

Shpesh është shumë e dobishme të kemi një version të modifikuar të homologjisë për të cilën një pikë ka grupe homologjie triviale në të gjitha dimensionet, përfshirë dhe dimensionin zero. Kjo arrihet duke definuar grupet e homologjisë së reduktuar $\tilde{H}_n(X)$ si grupet e homologjisë të zinxhirit të kompleksit të zgjeruar:

$$\cdots \rightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

ku $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$, ashtu siç është treguar në pohimin 4.3.2. Këtu është e nevojshme që X të jetë jo e zbrazët për të shmangur një grup homologjie jotriviale në dimensionin -1 . Pasi $\varepsilon \partial_1 = 0$, funksioni ε është trivial në imazhin e operatorit kufi ∂_1 . Kjo do të thotë që ε përcakton një homomorfizëm nga grupi homologjik $H_0(X)$ në \mathbb{Z} , ku bërthama e këtij homomorfizmi është grupi i homologjisë së reduktuar $\tilde{H}_0(X)$. Prandaj, kemi një ndarje direkte $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Qartazi për $n > 0$ kemi që $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X)$.

Në mënyrë formale, mund ta mendojmë \mathbb{Z} që është shtesë në kompleksin e zgjeruar të zinxhirit të gjeneruar nga pasqyrimi unik $[\emptyset] \rightarrow X$, ku $[\emptyset]$ është simpleksi i zbrazët, pa kulme. Pasqyrimi i zgjerimit ε është pastaj pasqyrimi i zakonshëm i kufirit, pasi $\partial[v_0] = [v_0] = [\emptyset]$.

4.4 Invarianca homotopike

Rezultati i parë thelbësor që do të tregojmë rreth homologjisë singulare është se hapësirat që janë homotopikisht ekuivalente kanë grupe homologjie izomorfe. Këtë do ta bëjmë duke treguar se $f : X \rightarrow Y$ indukon një homomorfizëm $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ për çdo n dhe se f_* është një izomorfizëm nëse f është një ekuivalencë homotopike.

Për pasqyrimin $f : X \rightarrow Y$, përcaktojmë një homomorfizëm të induktuar $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ duke kompozuar çdo n -simpleks singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ me f për të marrë një n -simpleks singular $f_{\#}(\sigma) = f\sigma : \Delta^n \rightarrow Y$. Ky homomorfizëm zgjerohet linearisht, pra për çdo kombinim linear kemi $f_{\#}(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i f_{\#}(\sigma_i) = \sum_i n_i (f\sigma_i)$.

Për pasqyrimet $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ kemi se vlen $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ sepse:

$$\begin{aligned} f_{\#}(\partial\sigma) &= f_{\#} \left(\sum_i (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \right) \\ &= \sum_i (-1)^i f \circ \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &= \partial(f_{\#}(\sigma)). \end{aligned}$$

Kështu, kemi diagramin komutativ:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\ \dots & \rightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) \rightarrow \dots \end{array}$$

Nga barazimi i mëparshëm kemi se $f_{\#}$ i dërgon ciklet në cikle pasi $\partial\alpha = 0$ implikon: $\partial(f_{\#}(\alpha)) = f_{\#}(\partial\alpha) = 0$. Po ashtu $f_{\#}$ i dërgon kufijtë në kufij, pasi: $f_{\#}(\partial\beta) = \partial(f_{\#}(\beta))$. Andaj $f_{\#}$ indukon homomorfizmin $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Në vazhdim do të përdorim shënimin $C_{\bullet}(X)$ për zinxhirin e komplekseve që përfshin grupet $C_n(X)$ dhe operatorët e kufirit ∂ .

Përkufizim 4.4.1. *Një morfizëm zinxhirësh $f_{\#} : C_{\bullet}(X) \rightarrow C_{\bullet}(Y)$ është një familje homomorfizmash $f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, të cilët komutojnë me operatorët e kufirit, pra:*

$$f_{n-1} \circ \partial = \partial \circ f_n \quad \text{për çdo } n,$$

ose $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$.

Duke ndjekur analogjinë me argumentet e mëparshme, arrijmë në këtë pohim:

Pohim 4.4.2. *Një morfizëm zinxhirësh ndërmjet dy zinxhirëve të komplekseve indukon një homomorfizëm ndërmjet grupeve të homologjisë të atyre dy komplekseve.*

Lehtësisht mund të vërtetohen këto veti funktoriale:

- (i) $(fg)_* = f_*g_*$ për një kompozim funksionesh $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$. Kjo rrjedh nga vetia asociative e kompozimit të funksioneve $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$.
- (ii) $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, ku $\mathbb{1}$ është pasqyrimi identitet në hapësirë ose grup.

Rjedhim 4.4.3. *Pasqyrimet $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ të indukuara nga një ekuivalencë homotopike $f : X \rightarrow Y$ janë izomorfizma për çdo n .*

Vërtetim. Le të jetë dhënë një homotopi me të dhënat e mëposhtme:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} X$$

e tillë që:

$$f \circ f' \cong id_Y \quad \text{dhe} \quad f' \circ f \cong id_X.$$

Atëherë në nivel të homologjisë kemi:

$$f'_* \circ f_* = (f' \circ f)_* = (id_X)_* = id_{H(X)}$$

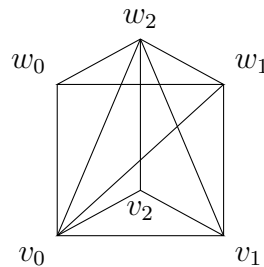
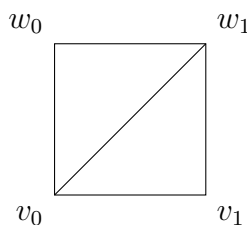
dhe

$$f_* \circ f'_* = (f \circ f')_* = (id_Y)_* = id_{H(Y)}.$$

Kjo tregon se f'_* është inversi i f_* prandaj f_* është një izomorfizëm.

Teoremë 4.4.4. Nëse dy funksione $f, g : X \rightarrow Y$ janë homotopike atëherë ato indukojnë të njëjtin homomorfizëm në homologji: $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Vërtetim. Vërtetimi i kësaj teoreme mbështetet në ndërtimin e operatorit prizmatik P që lidh pasqyrimet f dhe g në nivelin e zinxhirëve. Për të ndërtuar homotopinë në nivelin e zinxhirëve, fillojmë duke e ndarë cilindrin $\Delta^n \times I$ në simplekse.



Për rastin më thjesht për $n = 1$ (kemi që Δ^1 është një segment) cilindri bëhet një drejtkëndësh, i cili mund të ndahet në dy trekëndësha. Kur $n = 2$ fitojmë një prizëm trekëndor që mund të ndahet në tre tetraedra.

Në $\Delta^n \times I$ le të shënojmë me $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n]$ bazën e poshtme të cilindrit dhe $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n]$ bazën e sipërme ku çdo çift kulmesh (v_i, w_i) korrespondon me të njëjtën pikë në Δ^n përmes projeksionit natyral $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$.

Kalimi nga baza e poshtme në atë të sipërme realizohet përmes një vargu n -simpleksesh, ku në secilin hap njëri nga kulmet v_i zhvendoset në pozicionin përkatës w_i , duke filluar nga v_n e duke vazhduar deri te v_0 .

Kështu hapi i parë është të zhvendosim $[v_0, \dots, v_n]$ në $[v_0, \dots, v_{n-1}, w_n]$ pastaj hapi i dytë është të zhvendosim këtë në $[v_0, \dots, v_{n-2}, w_{n-1}, w_n]$ dhe kështu me radhë. Në një hap tipik kemi që $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ zhvendoset në $[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]$. Zona mes këtyre dy n -simplekseve është pikërisht një $(n+1)$ -simpleks $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ i cili ka si bazë të poshtme $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ dhe si bazë të sipërme $[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]$.

Prandaj cilindri $\Delta^n \times I$ përbëhet nga bashkimi i këtyre $(n+1)$ -simplekseve, ku çdo 2-simpleksë të njëpasnjëshëm ndërpriten përgjatë një faqe të përbashkët me dimension n .

Duke pasur një homotopi $\mathbb{F} : X \times I \rightarrow Y$ nga f në g dhe një simpleks singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ mund të formojmë kompozimin $\mathbb{F} \circ (\sigma \times \mathbb{1}) : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$. Duke përdorur këtë mund të definojmë operatorët prizmatikë $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ si në vijim:

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \mathbb{F} \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

Ne do të tregojmë se operatori prizmatik plotëson relacionin:

$$\partial P = g^\# - f^\# - P\partial$$

Gjeometrikisht ana e majtë e këtij ekuacioni përfaqëson kufirin e prizmit dhe tre termat në anën e djathtë përfaqësojnë bazën e sipërme $\Delta^n \times \{1\}$ baza e poshtme $\Delta^n \times \{0\}$ dhe mbështjellësin $\partial\Delta^n \times I$ e prizmit. Me të vërtetë:

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j \mathbb{F} \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} \mathbb{F} \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Tani mund ta përfundojmë vërtetimin e teoremës. Nëse $\alpha \in C_n(X)$ është një cikël, atëherë kemi: $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$ pasi $\partial\alpha = 0$.

Pra $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha)$ është një kufi, që do të thotë se $g_\#(\alpha)$ dhe $f_\#(\alpha)$ përcaktojnë të njëjtën klasë homologjie. Andaj kemi se g_* dhe f_* veprojnë njësoj mbi klasën e homologjisë së α -së.

□

Relacioni

$$\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$$

shpreh faktin se P është një homotopi zinxhirësh mes dy morfizmave të zinxhirëve $f_\#$ dhe

$g_{\#}$. Kjo do të thotë se $f_{\#}$ dhe $g_{\#}$ janë homotopike në nivel të zinxhirëve dhe indukojnë të njëjtin homomorfizëm në homologji. Pra mund të marrim këtë pohim:

Pohim 4.4.5. *Morfizmat e zinxhirëve që janë homotipikë ndaj njëri-tjetrit indukojnë të njëjtin homomorfizëm në homologji.*

4.5 Vargu ekzakt

Nëse do të ekzistonte gjithmonë një lidhje e thjesht ndërmjet grupeve të homologjisë së një hapësire X një nënhapësire A dhe hapësirës herës X/A atëherë do të kishim një mënyrë mjaft të dobishme për të kuptuar grupet e homologjisë të hapësirave si komplekset e qelizave, të cilat ndërtohen në mënyrë induktive nga nënhapësira gjithmonë e më komplekse.

Lidhja më e thjesht e mundshme do të ishte nëse $H_n(X)$ përmban $H_n(A)$ si një nëngrup dhe grupi herës $H_n(X)/H_n(A)$ është izomorf me $H_n(X/A)$. Mirëpo kjo nuk qëndron në rastin e përgjithshëm. Pasi çdo hapësirë X mund të vendoset në një hapësirë me homologji trivale (si koni $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$, i cili është kontraktil). Nëse ky parim i thjesht do të vlente gjithmonë teoria e homologjisë do të humbiste plotësisht kuptimin e saj.

Mirëpo ky model nuk ka nevojë të ndryshohet shumë për të arritur një lidhje që vlen në rast të përgjithshëm. Veçoria e re e këtij relacioni është se përfshin njëkohësisht grupet $H_n(X)$, $H_n(A)$ dhe $H_n(X/A)$ për të gjitha vlerat e n -it. Në praktikë kjo nuk është aq problematike sa mund të duket dhe për më tepër ka një anë pozitive: ndonjëherë mundëson që grupet e homologjisë në dimensione më të larta të llogariten nëpërmjet grupeve në dimensione më të ulëta, të cilat mund të jenë tashmë të njohura.

Për të formuluar këtë lidhje na duhet një përkufizim algjebrik që është thelbësor në topologjinë algjebrike.

Përkufizim 4.5.1. *Një varg i homomorfizmave*

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

quhet varg ekzakt nëse për çdo n vlen: $\ker \alpha_n = \text{Im } \alpha_{n+1}$.

Relacioni $\text{Im } \alpha_{n+1} \subseteq \ker \alpha_n$ është ekuivalente me faktin që $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$ që do të thotë se vargu është një zinxhir i komplekseve. Nga përfshirja në anën e kundërt $\ker \alpha_n \subseteq \text{Im } \alpha_{n+1}$ kemi se grupet e homologjisë të këtij kompleksi janë triviale.

Shembull 4.5.2. Disa nocione të zakonshme algjebrike mund të shprehen përmes vargjeve të sakta:

- (i) Vargu $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ është ekzakt atëherë dhe vetëm atëherë kur f është injektiv.
- (ii) Vargu $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ është ekzakt atëherë dhe vetëm atëherë kur f është surjektiv.
- (iii) Vargu $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ është ekzakt atëherë dhe vetëm atëherë kur f izomorfizëm, nga (i) dhe (ii).

Përkufizim 4.5.3. Varg ekzakt i shkurtër është një varg ekzakt i formës:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} C \rightarrow 0.$$

Kushtet e ekzaktësisë në këtë rast janë: i është injektiv, q është surjektiv, $\text{Im } i = \ker q$. Pra një varg ekzakt i shkurtër përshkruan C si herësin B/A , domethënë $C \cong B/A$.

Teoremë 4.5.4. Nëse X është një hapësirë dhe A është një nënhapësirë e mbyllur joboshe e cila është një deformim retrakt i ndonjë rrethine në X , atëherë ekziston një varg ekzakt:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \tilde{H}_0(X/A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ku $i : A \hookrightarrow X$ është përfshirja dhe $j : X \rightarrow X/A$ është pasqyrimi herës.

Ideja është që çdo element $x \in \tilde{H}_n(X/A)$ mund të përfaqësohet nga një zinxhir α në X , i tillë që kufiri $\partial\alpha$ është një cikël që ndodhet në A . Atëherë, klasa homologjike e këtij kufiri në A është pikërisht $\partial x \in \tilde{H}_{n-1}(A)$.

Çiftet (X, A) që plotësojnë kushte e teoremës quhen çifte të mira.

Pohim 4.5.5.

$$\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \text{ dhe } \tilde{H}_i(S^n) = 0 \text{ për } i \neq n.$$

Vërtetim. Për $n > 0$, marrim $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ atëherë $X/A \cong S^n$. Termat $\tilde{H}_i(D^n)$ në vargun ekzakt të gjatë për këtë çift janë zero pasi D^n është kontraktibile. Saktësia e vargut nënkupton që pasqyrimet $\tilde{H}_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ janë izomorfizma për $i > 0$ dhe që $\tilde{H}_0(S^n) = 0$. Rezultati rrjedh nga induksioni mbi n , duke filluar nga rasti S^0 , i cili vlen duke marrë për bazë Pohimin 4.3.1 dhe 4.3.3.

□

Për çifte të mira (X, A) kemi një varg ekzakt që lidh homologjinë e X, A dhe hapësirës herës X/A . Mirëpo për çifte më të përgjithshme kjo mund të zgjerohet duke përdorur homologjinë relative $H_n(X, A)$ e cila mat ndryshimin mes X dhe A . Kjo na jep një mënyrë për t'i studiuar hapësirat komplekse duke i zberthyer në pjesë më të thjeshta.

4.6 Homologjia relative

Ndonjëherë ndodh që duke injoruar një sasi të caktuar të të dhënave apo strukturës arrijmë në një teori më të thjeshtë, e cila në një mënyrë disi paradoksale, mund të japë rezultate që nuk do të ishin lehtësisht të arritshme në një kontekst më të përgjithshëm. Një shembull klasik i këtij fenomeni është aritmetika modulo n , ku injorohen shumëfishat e n , duke i trajtuar si të barabartë me zero.

Homologjia relative paraqet një tjetër shembull të ngjashëm, në këtë rast injorohen të gjithë zinxhirët singularë që ndodhen brenda një nënhapësire $A \subseteq X$. Duke i trajtuar ato si zero, ne fokusohemi vetëm te pjesët e hapësirës që nuk “barten” nga A , gjë që na lejon të nxjerrim informacione të vlefshme rreth lidhjes mes X dhe A . Grupi i homologjisë relative definohet si më poshtë.

Le të jetë X një hapësirë dhe $A \subset X$ nënhapësirë, le të jetë $C_n(X, A)$ grupi herës $C_n(X)/C_n(A)$. Zinxhirët në A janë trivialë në $C_n(X, A)$. Duke qenë se pasqyrimi i kufirit $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ merr $C_n(A)$ dhe e dërgon në $C_{n-1}(A)$, ajo indukon një pasqyrim të kufirit të herësit $\partial : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$. Duke e lënë n të variojë kemi një varg operatorësh të kufijve:

$$\cdots \rightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

Relaconi $\partial^2 = 0$ vlen për këta operatorë kufiri pasi ai vlen edhe para kalimit te grupet herës. Prandaj kemi një zinxhir kompleksesh dhe grupet e homologjisë $\ker \partial / \text{Im } \partial$ të këtij zinxhiri kompleksesh janë sipas përkufizimit grupet e homologjisë relative $H_n(X, A)$. Duke shqyrtuar përkufizimin e operatorit relativ të kufirit, vërejmë se:

- Elementet e $H_n(X, A)$ përfaqësohen nga cikle relative: n -zinxhirë $\alpha \in C_n(X)$ të tillë që $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$.
- Një cikël relativ α është trivial në $H_n(X, A)$ atëherë dhe atëherë nëse është një kufi relativ: $\alpha = \partial\beta + \gamma$, për ndonjë $\beta \in C_{n+1}(X)$ dhe $\gamma \in C_n(A)$.

Këto veti krijojnë idenë intuitive se $H_n(X, A)$ është homologjia e herësit X/A .

Tani tregojmë se grupet e homologjisë relative $H_n(X, A)$ për çdo çift (X, A) na japin në një varg të gjatë ekzakt:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X/A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_0(X/A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Shqyrtojmë diagramin:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

ku i është përfshirja dhe j është pasqyrimi herës. Diagrami është komutativ për shkak të përkufizimit të funksioneve të kufirit. Duke e lënë n të variojë dhe duke i shënuar këto vargje të shkurtra ekzakte vertikalisht në vend që horizontalisht do të fitojmë një diagram komutativ të formës:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Kolonat janë ekzakte dhe rreshtat janë zinxhirë të komplekseve të cilat i shënojmë me A , B , dhe C . Një diagram i tillë quhet një varg i shkurtër ekzakt i zinxhirëve të komplekseve. Do të tregojmë që kur kalojmë te grupe e homologjisë nga ky varg i shkurtër ekzakt i zinxhirëve të komplekseve fitojmë një varg të gjatë ekzakt të grupeve të homologjisë:

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

ku $H_n(A)$ është grupin i homologjisë $\ker \partial / \text{Im } \partial$ në A_n në zinxhirin e komplekseve A po ashtu $H_n(B)$ dhe $H_n(C)$ janë të përkufizuara në mënyrë të ngjashme.

Komutativiteti i katrorëve në vargun ekzakt të shkurtër të zinxhirëve të komplekseve nënkupton që i dhe j janë morfizma të zinxhirëve. Prandaj indukojnë pasqyrime në homologji, përkatësisht i_* dhe j_* .

Për të përkufizuar operatorin e kufirit $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$, le të zgjedhim një cikël $c \in \ker \partial \subseteq C_n$. Pasi j është pasqyrim surjektiv ekziston një element $b \in B_n$ i tillë që

$c = j(b)$. Tani $\partial b \in B_{n-1}$ është në bërthamën e j sepse $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$. Nga saktësia e vargut kemi $\ker j = \text{Im } i$, prandaj ekziston një $a \in A_{n-1}$ i tillë që $\partial b = i(a)$. Vërejmë se $\partial a = 0$, pasi $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial \partial b = 0$, dhe i është injektive.

Kështu përkufizojmë operatorin e kufirit $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ duke dërguar klasën e homologjisë të c në klasën e homologjisë të a : $\partial[c] = [a]$.

Ky përkufizim është mirë i definuar sepse:

- Elementi a përcaktohet në mënyrë unike nga ∂b , pasi i është injektive.
- Nëse do të kemi një zgjedhje tjetër b' për b do të marrim $j(b') = j(b)$ pra $b' - b$ është në $\ker j = \text{Im } i$. Prandaj $b' - b = i(a')$ për ndonjë a' dhe kështu $b' = b + i(a')$. Zëvendësimi i b me $b + i(a')$ ndikon në ndryshimin e a në elementin homolog $a + \partial a'$, pasi:

$$i(a + \partial a') = i(a) + i(\partial a') = \partial b + \partial i(a') = \partial(b + i(a')).$$

- Një zgjedhje tjetër e c brenda klasës së saj të homologjisë do të kishte formën $c + \partial c'$. Meqenëse $c' = j(b')$ për ndonjë b' , atëherë:

$$c + \partial c' = c + \partial j(b') = c + j(\partial b') = j(b + \partial b'),$$

kështu që b zëvendësohet me $b + \partial b'$, gjë që nuk e ndryshon ∂b dhe rrjedhimisht as a .

Pasqyrimi $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ është homomorfizëm sepse nëse $\partial[c_1] = [a_1]$ dhe $\partial[c_2] = [a_2]$, përmes elementeve përkatëse b_1 dhe b_2 si më sipër, kemi:

$$j(b_1 + b_2) = j(b_1) + j(b_2) = c_1 + c_2$$

dhe

$$i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial b_1 + \partial b_2 = \partial(b_1 + b_2),$$

prandaj:

$$\partial([c_1] + [c_2]) = [a_1] + [a_2].$$

Teoremë 4.6.1. *Vargu i grupeve të homologjisë*

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

është varg ekzakt.

Vërtetim. Për të vërtetuar teoremën tregojmë se vlejnjë gjashtë faktet e mëposhtme:

- $\text{Im } i_* \subset \ker j_*$: Kjo rrjedh menjëherë pasi $ji = 0$, që implikon $j_*i_* = 0$.
- $\text{Im } j_* \subset \ker \partial$: Kemi që $\partial j_* = 0$, pasi $\partial b = 0$ nga mënyra e përkufizimit të ∂ .
- $\text{Im } \partial \subset \ker i_*$: Kemi se $i_*\partial = 0$, pasi $i_*\partial$ e dërgon $[c]$ në $[\partial b] = 0$.
- $\ker j_* \subset \text{Im } i_*$: Një klasë e homologjisë në $\ker j_*$ përfaqësohet nga një cikël $b \in B_n$, ashtu që $j(b)$ është kufi, pra $j(b) = \partial c'$ për ndonjë $c' \in C_{n+1}$. Meqë j është pasqyrim surjektiv ekziston $b' \in B_{n+1}$ ashtu që $c' = j(b')$. Kemi:

$$j(b - \partial b') = j(b) - j(\partial b') = j(b) - \partial j(b') = j(b) - \partial c' = 0.$$

Pra $b - \partial b' = i(a)$ për ndonjë $a \in A_n$.

Tani tregojmë që a është një cikël, vërtet pasi:

$$i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0.$$

si dhe i është pasqyrim injektiv. Pra a përfaqëson një klasë të homologjisë në $H_n(A)$ dhe $i_*([a]) = [b - \partial b'] = [b]$ që do të thotë se $[b] \in \text{Im } i_*$.

- $\ker \partial \subset \text{Im } j_*$: Nga shënimi që përdorëm për përkufizimin e ∂ , kemi se nëse $[c] \in H_n(C)$ është në bërthamën e ∂ , atëherë $a = \partial a'$ për ndonjë $a' \in A_n$. Elementi $b - i(a')$ është cikël, sepse:

$$\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0.$$

Po ashtu:

$$j(b - i(a')) = j(b) - j(i(a')) = j(b) = c.$$

Pra, j_* e dërgon $[b - i(a')]$ në $[c]$, që rrjedh se $[c] \in \text{Im } j_*$.

- $\ker i_* \subset \text{Im } \partial$: Le të jetë $a \in A_{n-1}$ cikël i tillë që $i(a) = \partial b$ për ndonjë $b \in B_n$. Atëherë $j(b)$ është cikël, sepse:

$$\partial j(b) = j(\partial b) = j(i(a)) = 0.$$

∂ e dërgon $[j(b)]$ në $[a]$, pra $[a] \in \text{Im } \partial$.

□

Kthehemi te topologjia ku teorema e mëparshme algjebrike na jep një varg të gjatë ekzakt të grupeve të homologjisë:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Operatori i kufirit $\partial : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ ka një përshkrim shumë të thjeshtë: nëse një klasë homologjike relative $[\alpha] \in H_n(X, A)$ është përfaqësuar nga një zinxhir relativ α në X , atëherë kufiri $\partial\alpha$ është një zinxhir në A që është cikël, dhe klasa homologjike e tij në $H_{n-1}(A)$ është pikërisht $\partial[\alpha]$. Kjo rrjedh drejtpërdrejt nga përkufizimi algjebrik i homomorfizmit të kufirit në vargjet e sakta të gjata të grupeve të homologjisë që asocohet me një varg të shkurtër ekzakt të zinxhirëve të komplekseve.

Ky varg ekzakt i gjatë e bën të qartë idenë se grupet $H_n(X, A)$ matin diferencën mes grupeve $H_n(X)$ dhe $H_n(A)$. Nëse $H_n(X, A) = 0$ për çdo n , atëherë përfshirja $A \hookrightarrow X$ indukon izomorfizmin $H_n(A) \cong H_n(X)$ për çdo n .

Ekziston një varg plotësisht i ngjashëm ekzakt i gjatë i grupeve të reduktuara të homologjisë për (X, A) ku $A \neq \emptyset$. Kjo rrjedh nga aplikimi i aparatit algjebrik të mëparshëm në vargun e shkurtër ekzakt zinxhirëve të komplekseve të formuar nga vargjet e shkurtra të sakta:

$$0 \longrightarrow C_n(A) \longrightarrow C_n(X) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

në dimensione jonegative, të zgjeruara nga vargjet e shkurtra të sakta

$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$ në dimensionin -1 . Në veçanti kemi se $\tilde{H}_n(X, A)$ është e njëjtë me $H_n(X, A)$ për çdo n , kur $A \neq \emptyset$.

Shembull 4.6.2. Do të gjejmë grupeve e homologjisë për çiftin $(D^n, \partial D^n)$. Për këtë do të ndërtojmë vargun e gjatë ekzakt të homologjisë së reduktuar për çiftin $(D^n, \partial D^n)$:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_i(\partial D^n) \rightarrow \tilde{H}_i(D^n) \rightarrow \tilde{H}_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(\partial D^n) \rightarrow \cdots$$

Kemi që $\tilde{H}_i(D^n) = 0$ për çdo i pasi D^n është kontraktibile dhe

$$\tilde{H}_i(\partial D^n) = \tilde{H}_i(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{nëse } i = n - 1 \\ 0, & \text{në të kundërtën} \end{cases}$$

atëherë vargu merr formën:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0$$

Ky është një varg i shkurtër ekzakt, që do të thotë se ∂ është izomorfizëm, pra kemi:

$$\tilde{H}_n(D^n, \partial D^n) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

Për $i \neq n$ termat janë zero prandaj:

$$\tilde{H}_i(D^n, \partial D^n) = 0 \quad \text{për } i \neq n$$

Andaj përfundojmë se

$$H_i(D^n, \partial D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{nëse } i = n \\ 0, & \text{nëse } i \neq n \end{cases}$$

Shembull 4.6.3. Do të tregojmë se për një hapësirë topologjike X dhe një pikë të fiksuar $x_0 \in X$ kemi izomorfizmin:

$$H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X) \quad \text{për çdo } n \in \mathbb{Z}.$$

Konsiderojmë vargun e gjatë ekzakt të homologjisë së reduktuar për çiftin (X, x_0) :

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(x_0) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(X, x_0) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(x_0) \rightarrow \cdots$$

Pasi x_0 është një pikë e vetme dhe çdo pikë është kontraktibile atëherë kemi: $\tilde{H}_n(x_0) = 0$ për çdo n . Andaj kemi se:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(X, x_0) \rightarrow 0$$

Ky është një varg i shkurtër ekzakt nga i cili fitojmë izomorfizmin e kërkuar.

Ashtu si në rastin e homologjisë absolute (jorelative) edhe për homologjinë relative ekzistojnë homomorfizma të induktuar. Një funksion $f : X \rightarrow Y$ i cili plotëson kushtin $f(A) \subseteq B$, mund të konsiderohet si një funksion mes çifteve topologjike $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Ky funksion indukton një homomorfizëm në nivelin e grupeve të zinxhirëve relativë $f_{\#} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$ pasi pasqyrimi i zinxhirëve $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ e dërgon

$C_n(A)$ në $C_n(B)$ dhe si rrjedhojë marrim një funksion të mirë përkufizuar në grupet herës:

$$f_{\#} : C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_n(Y)/C_n(B) = C_n(Y, B)$$

Për më tepër vlen identiteti i zakonshëm për zinxhirët: $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$ i cili është i vlefshëm edhe në rastin relativ, pasi vlen në rastin absolut. Si rrjedhim nga Pohimi 4.4.2 kemi që f indukon një homomorfizëm në nivelet e homologjisë relative:

$$f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

Pohim 4.6.4. Nëse dy funksione $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ janë homotopike përmes funksioneve $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ atëherë $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.

Vërtetim. Operatori i prizmit P i përkufizuar si në vërtetimin e Teoremës 4.4.4 e dërgon $C_n(A)$ në $C_{n+1}(B)$ pra indukon një operator prizmi relativ $P : C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(Y, B)$. Në këtë mënyrë kalimi në grupet herës bën që formula $\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}$ të mbetet e vlefshme. Kështu funksionet $f_{\#}$ dhe $g_{\#}$ në grupet e zinxhirëve relativë janë homotopi zinxhirore dhe prandaj ato indukojnë të njëjtin homomorfizëm në grupet e homologjisë relative.

□

Një veti themelore e grupeve të homologjisë relative jepet nga teorema në vazhdim, e cila përshkruan kur grupet relative $H_n(X, A)$ nuk ndikohen nga shkëputja ose largimi i një nënbashkësie $Z \subset A$.

Teoremë 4.6.5 (Teorema e Shkëputjes - Excision Theorem). *Le të jenë dhënë nënbashkësitë $Z \subset A \subset X$ të tilla që $Cl(Z) \subset Int(A)$ atëherë përfshirja $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ indukon izomorfizëm:*

$$H_n(X - Z, A - Z) \cong H_n(X, A) \quad \text{për çdo } n.$$

Një mënyrë ekuivalente për ta shprehur këtë është: Nëse A dhe B janë nënhapësira të X ashtu që $X = Int(A) \cup Int(B)$ përfshirja $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ indukon izomorfizëm:

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A) \quad \text{për çdo } n.$$

Lidhja mes këtyre dy versioneve arrihet duke vendosur $B = X - Z$ dhe $Z = X - B$. Kështu $A \cap B = A - Z$ dhe kushti $Cl(Z) \subset Int(A)$ është ekuivalent me $X = Int(A) \cup Int(B)$ sepse $X - Int(B) = Cl(Z)$.

Teoremë 4.6.6. Nëse $U \subset \mathbb{R}^m$ dhe $V \subset \mathbb{R}^n$ janë hapësira të hapura joboshe dhe ekziston një homeomorfizëm $h : U \rightarrow V$ atëherë $m = n$.

Vërtetim. Le të zgjedhim një pikë $x \in U$. Nga teorema e shkëputjes kemi: $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$. Nga vargu i gjatë ekzakt për $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ rrjedh se: $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\})$. Pasi $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ deformatohet në mënyrë homotopike në sferën S^{m-1} , kemi:

$$\tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{m-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{nëse } k = m \\ 0, & \text{në të kundërtën} \end{cases}$$

Pra për çdo $x \in U$, kemi:

$$H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{nëse } k = m \\ 0, & \text{në të kundërtën} \end{cases}$$

Në mënyrë analoge për çdo $y \in V$, kemi:

$$H_k(V, V \setminus \{y\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{nëse } k = n \\ 0, & \text{në të kundërtën} \end{cases}$$

Tani për çdo homeomorfizëm $h : U \rightarrow V$ kemi izomorfizmin: $H_k(U, U \setminus \{x\}) \rightarrow H_k(V, V \setminus \{h(x)\})$ për çdo k prandaj kemi që $m = n$.

4.7 Vargu ekzakt i Mayer–Vietoris-it

Përveç vargut të gjatë ekzakt të grupeve të homologjisë për (X, A) , ekziston edhe një tjetër lloj tjetër i vargut të gjatë ekzakt, i njohur si vargu i Mayer–Vietoris-it, që në disa raste është më i përshtatshëm për llogaritje. Fillimisht e shqyrtojmë atë në formë algjebrike.

Teoremë 4.7.1. [Vargu algjebrik Mayer–Vietoris-it] Konsiderojmë diagramin komutativ të grupeve abeliane

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A''_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{i_n} & A_n & \xrightarrow{q_n} & A''_n & \xrightarrow{\delta_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \phi''_{n+1} & & \downarrow \phi'_n & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi''_n & & \downarrow \phi'_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B''_{n+1} & \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} & B'_n & \xrightarrow{j_n} & B_n & \xrightarrow{r_n} & B''_n & \xrightarrow{\epsilon_n} & B'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

ku rreshtat janë vargje të gjata ekzakte dhe homomorfizmat ϕ''_n janë izomorfizma për çdo n .
Atëherë ekziston një varg tjetër i gjatë ekzakt:

$$\dots \rightarrow A'_n \xrightarrow{(i_n, \phi'_n)} A_n \oplus B'_n \xrightarrow{\phi_n - j_n} B_n \xrightarrow{\Delta_n} A'_{n-1} \rightarrow \dots,$$

ku $\Delta_n = \delta_n \circ (\phi''_n)^{-1} \circ r_n$.

Vërtetim. Së pari tregojmë se kompozimi i pasqyrime të njëpasnjëshme është zero, pra se në çdo hap imazhi është i përfshirë në bërthamë:

- $(\phi_n - j_n) \circ (i_n, \phi'_n) = \phi_n i_n - j_n \phi'_n = 0$ sepse diagrami i dhënë është komutativ.
- $\Delta_n \circ (\phi_n - j_n) = \delta_n (\phi''_n)^{-1} r_n \phi_n - \delta_n (\phi''_n)^{-1} r_n j_n = \delta_n q_n - 0 = 0$, sepse $\delta_n q_n = 0$ dhe $r_n j_n = 0$.
- $(i_{n-1}, \phi'_{n-1}) \circ \Delta_n = (i_{n-1} \delta_n (\phi''_n)^{-1} r_n, \phi'_{n-1} \delta_n (\phi''_n)^{-1} r_n) = (0, \epsilon_n r_n) = 0$ meqenëse $i_{n-1} \delta_n = 0$ dhe $\epsilon_n r_n = 0$.

Tani për të treguar që vargu është ekzakt duhet të tregojmë që në çdo hap bërthama është e përfshirë në imazh:

- Le të jetë $x \in B_n$ i tillë që $\Delta_n x = 0$. Atëherë $(\phi''_n)^{-1} r_n x$ është në bërthamën e δ_n prandaj ekziston $y \in A_n$ me $q_n(y) = (\phi''_n)^{-1} r_n x$ që mund ta rishkruajmë si $r_n \phi_n(y) = r_n x$. Andaj $x - \phi_n(y)$ është në bërthamën e r_n dhe kështu ekziston $z \in B'_n$ ashtu që $j_n z = x - \phi_n(y)$. Andaj $x = \phi_n(y) + j_n(z) = (\phi_n - j_n)(y, -z)$. Vërejmë se zgjedhja e shenjave në këtë varg ekzakt është disi arbitrare dhe mund të kishim zgjedhur edhe shenja të tjera që do të ishin po ashtu të përshtatshme.
- Le të jenë $(a, b) \in A_n \oplus B'_n$ ashtu që $\phi_n(a) - j_n(b) = 0$. Atëherë $\phi''_n q_n a = r_n \phi_n a = r_n j_n b = 0$ dhe pasi ϕ''_n është izomorfizëm kemi se $q_n a = 0$. Prandaj ekziston $x \in A'_n$ ashtu që $a = i_n x$. Po ashtu $j_n b = j_n \phi'_n x$ dhe andaj ekziston $y \in B''_{n+1}$ me $\epsilon_{n+1}(y) = b - \phi'_n x$. Vendosim $x' := x + \delta_{n+1} (\phi''_{n+1})^{-1}(y)$ atëherë kemi që $i_n x' = i_n x + 0 = a$ dhe $\phi'_n x' = \phi'_n x + \epsilon_{n+1}(y) = b$.
- Le të jetë $a \in A'_{n-1}$ ashtu që $i_{n-1} a = 0$ dhe $\phi'_{n-1} a = 0$. Atëherë ekziston $x \in A''_n$ me $a = \delta_n x$. Për më tepër $\epsilon_n \phi''_n x = \phi'_{n-1} a = 0$ kështu që ekziston $y \in B_n$ me $r_n y = \phi''_n x$. Por atëherë kemi $\Delta_n y = \delta_n (\phi''_n)^{-1} r_n y = \delta_n x = a$ pra ashtu siç kërkohet.

□

Tani do të zbatojmë këtë konstruktiv algjebrik në homologjinë singulare. Le të jetë X një hapësirë topologjike dhe $A, B \subseteq X$ nënhapësira të tilla që $\text{Int}A \cup \text{Int}B = X$. Kemi përfshirjet:

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xleftarrow{j} & A \\ j' \downarrow & & \downarrow i \\ B & \xleftarrow{i'} & X \end{array}$$

dhe po ashtu një morfizmë dyshesh $\iota = (i, j') : (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$. Pastaj ι indukon izomorfizmë në homologji $H_\bullet(A, A \cap B) \rightarrow H_\bullet(X, B)$. Shënimi H_\bullet përdoret për të treguar të gjitha grupet e homologjisë njëherësh, pra koleksionin $\{H_n\}_{n \geq 0}$ për çdo dimension n . Mund të zbatojmë teoremën e shkëputjes për nënhapësirën $U = X \setminus A$, pasi nga supozimet tona kemi që $\text{Cl}(U) = X \setminus \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$. Vargjet e gjata ekzakte për këto dy çifte japin më pas një diagram komutativ:

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(A, A \cap B) & \xrightarrow{\iota_*} & H_{n+1}(X, B) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ H_n(A \cap B) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(B) \\ \downarrow j_* & & \downarrow i'_* \\ H_n(A) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(A, A \cap B) & \xrightarrow{\iota_*} & H_n(X, B) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ H_{n-1}(A \cap B) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

ku rreshtat janë ekzaktë dhe pasqyrimet ι_* janë izomorfizma. Nga teorema 4.7.1 mund të përfitojmë një varg të ri ekzakt të gjatë.

Rjedhim 4.7.2 (Vargu ekzakt i Mayer–Vietoris-it). *Le të jetë X një hapësirë topologjike dhe $A, B \subseteq X$ nënhapësira të tilla që $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = X$. Atëherë ekziston një varg ekzakt i gjatë i quajtur vargu i Mayer–Vietoris-it:*

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{(j_*, j'_*)} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{i_* - i'_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots,$$

ku Δ është kompozimi:

$$H_n(X) \rightarrow H_n(X, B) \xrightarrow{(\iota_*)^{-1}} H_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B).$$

Shembull 4.7.3. (Homologjia e Shishes së Klein-it) Do të shqyrtojmë grupet homologjisë së shishes së Klein-it X . Duke qenë se X është e lidhur sipas rrugëve kemi se $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Kemi që X mund të ndërtohet si I^2 / \sim ku $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ dhe relacioni i ekuivalencës \sim jepet me:

- $(0, y) \sim (1, y)$ për çdo $y \in [0, 1]$ dhe
- $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ për çdo $x \in [0, 1]$.

Kësaj ndarje i bashkëngjisim topologjinë herës përmes funksionit $g : I^2 \rightarrow I^2 / \sim$. Pra shisha e Klein-it ndërtohet duke identifikuar pikat në kufi të katrorit njësi sipas rregullave të mësipërme.

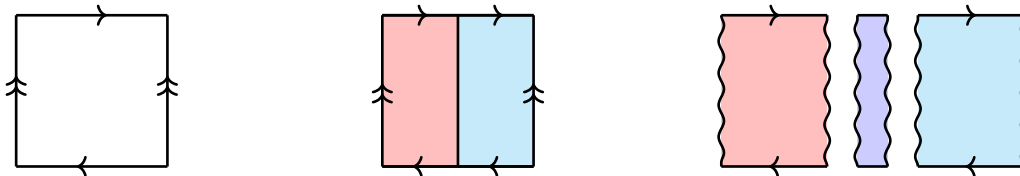


Figura 4.4: Shishja e Klein-it.

Mund ta ndajmë X në dy shirita të Mobius-it A dhe B , të cilët priten përgjatë kufijve të tyre, siç është dhënë në figurën 4.4, ku A dhe B janë paraqitur vizualisht me ngjyrë të kuqe dhe të kaltërt, përkatësisht. A , B dhe $A \cap B$ mund të pësojnë deformim retrakt në rreth prandaj janë homotopikisht ekuivalente me S^1 . Për shkak se homologjia është invariante ndaj ekuivalencës homotopike, kemi:

$$H_n(A) \cong H_n(B) \cong H_n(A \cap B) \cong H_n(S^1), \text{ për çdo } n \geq 0.$$

Për $n > 2$, duke përdorur vargun Mayer–Vietoris-it fitojmë vargun ekzakt:

$$H_n(S^1) \oplus H_n(S^1) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(S^1) \rightarrow H_{n-1}(S^1) \oplus H_{n-1}(S^1)$$

i cili reduktohet në:

$$0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0 \rightarrow 0.$$

Kjo tregon që $H_n(X) \cong 0$ për çdo $n > 2$. Na mbetet të llogarisim $H_1(X)$ dhe $H_2(X)$. Prapë nga vargu Mayer–Vietoris-it kemi vargun:

$$H_2(S^1) \oplus H_2(S^1) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0,$$

i cili reduktohet në:

$$0 \rightarrow H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} H_1(X) \rightarrow 0.$$

Funksioni f është i dhënë si: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $1 \mapsto (2, -2)$, ku kufiri i secilit shirit të Mobius-it rrotullohet dy herë rreth rrethit, pra kemi një pasqyrim të shkallës 2 që përfshin edhe orientimin. Duke qenë se f është injektiv kemi $H_2(X) \cong 0$ sipas Teoremës së parë të izomorfizmit. Tutje pasi $\text{Im}(f) = 2\mathbb{Z}(1, -1) = \ker(g)$ dhe g është surjektiv kemi që $H_1(X) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/2\mathbb{Z}(1, -1)$. Duke marrë parasysh që $\{(1, 0), (1, -1)\}$ përbëjnë një bazë për $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ kemi se:

$$H_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Homologjia e shishes së Klein-it është:

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{nëse } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{nëse } n = 1 \\ 0, & \text{nëse } n \geq 2 \end{cases}$$

Shembull 4.7.4. Le të marrim grupin e homologjisë së reduktuar të rendit n të $X \vee Y$, ku hapësirat X dhe Y kanë rrethina të hapura $U \subset X$ dhe $V \subset Y$, respektivisht, ku secila prej U dhe V bën deformim retrakt në pikën bazë të X dhe Y të cilat janë identifikuar gjatë ndërtimit të $X \vee Y$.

Le të jenë $A = X \cup V$ dhe $B = Y \cup U$. Atëherë duke përdorur vargun Mayer-Vietoris-it për homologjinë e reduktuar dhe përdorur faktin se $A \cap B = U \cap V$, kemi për çdo n vargun ekzakt:

$$\tilde{H}_n(U \cap V) \rightarrow \tilde{H}_n(X \cup V) \oplus \tilde{H}_n(Y \cup U) \rightarrow \tilde{H}_n(X \vee Y) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(U \cap V).$$

Por $U \cap V$ bën deformim retrakt në një pikë (pra homologjia e saj e reduktuar është zero

në çdo rend) ndërsa $X \cup V$ bën deformim retrakt në X dhe $Y \cup U$ bën deformim retrakt në Y . Duke përdorur faktin se homologjia është invariante ndaj deformimit retrakt vargu i mësipërm shëndrrohet në:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y) \rightarrow \tilde{H}_n(X \vee Y) \rightarrow 0.$$

Pra për çdo n kemi izomorfizmin:

$$\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y).$$

Supozojmë se X është një hapësirë topologjike e tillë që $X = A \cup B$ ku A dhe B janë nënhapësira të X të cilat janë të hapura, të lidhura sipas rrugëve dhe përmbajnë pikën bazë të X . $A \cap B$ është gjithashtu e lidhur sipas rrugëve. Atëherë nga vargu ekzakt i Mayer-Vietoris-it kemi vargun ekzakt:

$$H_1(A \cap B) \longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B)$$

Meqë grupi i homologjisë së rendit zero i një hapësire të lidhur sipas rrugëve është izomorf me \mathbb{Z} , vargu më sipër merr formën:

$$H_1(A \cap B) \xrightarrow{\phi} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{\psi} H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Pasqyrimi ψ është surjektiv sipas supozimeve hapësirat janë të lidhura sipas rrugëve dhe sipas teoremës së parë të izomorfizmave kemi $H_1(A) \oplus H_1(B) / \ker(\psi) \cong H_1(X)$. Nga saktësia e vargut kemi që $\ker(\psi) = \text{Im}(\phi)$ andaj:

$$(H_1(A) \oplus H_1(B)) / \text{Im}(\phi) \cong H_1(X)$$

Nga ana tjetër sipas supozimeve fillestare dhe nga teorema e Van Kampen-it ekziston një homomorfizëm:

$$\theta : \pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B) \longrightarrow \pi_1(X)$$

ku $*_{\pi_1(A \cap B)}$ paraqet produktin e lirë amalgamë të grupeve, i cili indukon një izomorfizëm:

$$\pi_1(X) \cong (\pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B)) / \ker(\theta)$$

Nga teorema 4.3.4 kemi se për një hapësirë Y të lidhur sipas rrugëve vlen $H_1(Y) \cong \pi_1^{ab}(Y)$

gjithashtu nëse dy nënhapësira të lidhura sipas rrugëve kanë të paktën një pikë të përbashkët atëherë bashkimi i tyre është po ashtu i lidhur sipas rrugëve. Për më tepër abelianizimi i një produkti të lirë të grupeve është izomorf me shumën direkte të abelianizimeve të tyre. Duke u bazuar në këto fakte arrijmë të rifitojmë izomorfizmin e mëparshëm:

$$(H_1(A) \oplus H_1(B)) / \text{Im}(\varphi) \cong H_1(X)$$

Në këtë mënyrë shohim një analogjinë mes vargut Mayer-Vietoris-it dhe Teoremës së Van Kampen-it, ku vargu Mayer-Vietoris-it jep saktësisht formën e abelianizuar të Teoremës së Van Kampen-it.

4.8 Ekuivalenca mes homologjisë simplekse dhe asaj singulare

Homologjia simplekse përcaktohet përmes një dekompozimi të hapësirës X në një Δ -kompleks me një koleksion pasqyrimesh $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Grupet e zinxhirëve i kemi përkufizuar si grupet të lira abeliane të gjeneruara nga n -simplekset. Në kapitullin 3, homologjinë simplekse e kemi ndërtuar mbi fusha, duke punuar kështu me hapësira vektoriale. Sidoqoftë, sipas vërejtjes 3.2.3, mund të trajtojmë edhe rastin mbi unaza, ku grupet e zinxhirëve janë grupe abeliane të lira, pra jo domosdoshmërisht hapësira vektoriale. Prandaj, në vazhdim do të konsiderojmë homologjinë simplekse mbi unaza, ku grupet e zinxhirëve janë grupe abeliane të lira të ndërtuara nga n -simplekset.

Vërejtje 4.8.1. *Të gjitha përkufizimet, vetitë dhe pohimet që i kemi trajtuar për homologjinë singulare mund të përshtaten në mënyrë analoge edhe për homologjinë simplekse, duke i zëvendësuar zinxhirët singularë me zinxhirët të simplekseve.*

Qëllimi ynë është të tregojmë se homologjia simplekse përputhet me homologjinë singulare të hapësirës X nëse zgjedhim një strukturë të Δ kompleksit. Për ta arritur këtë do të përdorim induksionin mbi skeletin X^k që përmban të gjitha simplekset me dimension k ose më të vogla. Për të zhvilluar këtë lidhje, do të përdorim versionin relativ të homologjisë simplekse.

Për çdo nënkompleks $A \subset X$, homologjia simplekse relative mund të përkufizohet përmes zinxhirëve relativë

$$\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X) / \Delta_n(A),$$

dhe do të e shënojmë me $H_n^\Delta(X, A)$.

Teoremë 4.8.2. *Çdo n -simpleks në një dekompozim të Δ -kompleksve të X mund të shikohet si një n -simpleks singular; prandaj kemi një morfizëm të zinxhirëve:*

$$\Delta_n(X, A) \longrightarrow C_n(X, A).$$

Homomorfizmi i induktuar $H_n^\Delta(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$ është një izomorfizëm. Kur $A = \emptyset$ kemi se grupet relative reduktohen në grupet absolute.

Marrim së pari lemën në vazhdim:

Lemë 4.8.3. *Pasqyrimi identitet $i_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ është një cikël që gjeneron $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.*

Vërtetim. Ne duam të tregojmë se cikli i_n gjeneron grupin e homologjisë relative $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ për çdo $n \geq 0$. Për ta bërë këtë përdorim induksion mbi n . Për rastin bazë $n = 0$, Δ^0 është një pikë dhe kufiri i tij është bosh, pra $\partial\Delta^0 = \emptyset$. Qartazi kemi se i_0 e gjeneron $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0)$.

Tani supozojmë se për $n - 1$, cikli i_{n-1} gjeneron homologjinë relative $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$. Duam të tregojmë se edhe i_n gjeneron homologjinë $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Për këtë, konsiderojmë nënkompleksin Λ të kufirit $\partial\Delta^n$, i cili është unioni i të gjitha faqeve $(n - 1)$ - dimensionale përveç një prej tyre. Me fjalë të tjera, Λ është kufiri $\partial\Delta^n$ me një faqe të hequr. Kemi një deformim retrakt nga Δ^n në Λ . Nga kjo kemi që $H_i(\Delta^n, \Lambda) = 0$ për çdo i . Andaj marrim izomorfizmin

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda).$$

Më pas, vërejmë se çifti $(\partial\Delta^n, \Lambda)$ është homeomorf me $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$. Kjo ndodh sepse largimi i një faqeje nga kufiri i Δ^n është ekuivalent me një simpleks më të vogël me kufirin e tij. Pra,

$$H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}).$$

Cikli i_n në homologjinë relative $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ kalon përmes kufirit në ∂i_n që është një kombinim i faqeve të tij dhe kur e shohim në çiftin $(\partial\Delta^n, \Lambda)$, ai përfaqëson pikërisht identitetin i_{n-1} (me ndonjë shenjë) mbi faqen që mungon në Λ . Pra përmes këtyre izomorfizmave, $i_n \mapsto \partial i_n \mapsto \pm i_{n-1}$. Sipas hipotezës së induksionit, i_{n-1} gjeneron grupin e homologjisë relative andaj rrjedh se edhe i_n gjeneron grupin $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Tani vazhdojmë me vërtetimin e teoremës.

Vërtetim. Së pari supozojmë që X ka dimension të fundmë dhe $A = \emptyset$. Atëherë pasqyrimi nga homologjia simplekse në homologjinë singulare jep një morfizëm të vargjeve të gjata ekzakte të homologjisë relative:

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n+1}^{\Delta}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_n^{\Delta}(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_n^{\Delta}(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n-1}^{\Delta}(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Do të tregojmë se pasqyrimet horizontale janë izomorfizma dhe më pas do të përfundojmë që edhe pasqyrimi në qendër është izomorfizëm.

Së pari shikojmë pasqyrimet në homologjinë relative, grupi $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ është grup abelian i lirë mbi k -simplekset andaj është zero për $n \neq k$. Mirëpo i vetmi grup homologjie jozero është $H_k^{\Delta}(X^k, X^{k-1})$. Për të llogaritur grupin singular $H_k(X^k, X^{k-1})$ marrim të gjitha simplekset së bashku si një pasqyrim

$$\Phi : \bigsqcup (\Delta^k, \partial\Delta^k) \longrightarrow (X^k, X^{k-1})$$

dhe vërejmë se na jep një homeomorfizëm të hapësirave herës. Prandaj kemi:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\bullet}(\Delta_{\alpha}^k, \partial\Delta_{\alpha}^k) & \longrightarrow & H_{\bullet}(X^k, X^{k-1}) \\
 \parallel & & \downarrow \\
 \tilde{H}_{\bullet}(\Delta^k/\partial\Delta^k) & \xlongequal{\quad} & \tilde{H}_{\bullet}(X^k/X^{k-1})
 \end{array}$$

që tregon se pjesa e sipërme është izomorfizëm. Duke përdorur lemën e mëparshme që thotë

se gjeneratorët e $H_n(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ janë të njëjtë me gjeneratorët e simplekseve, përfitojmë që pasqyrimet

$$H_k^\Delta(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow H_k(X^k, X^{k-1})$$

janë izomorfizma. Pasqyrimi i dytë dhe i pestë vertikal janë izomorfizma përmes induksionit dhe pastaj nga Lema e Pestë 4.8.4 marrim që edhe pasqyrimi në qendër është izomorfizëm.

Tani do të shqyrtojmë rastin kur X nuk ka dimension të fundmë. Përdorim faktin që një nënhapësirë kompakte në X mund të përmbajë vetëm një numër të fundmë simpleksesh të hapura (d.m.th. simplekse me disa faqe të hequra) të X (përndryshe do të kishim një varg të pafundëm (x_i) ashtu që $U_i = X - \bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$ jep një mbulojë të hapur të bashkësisë kompakte, pa asnjë nënmbulim të fundmë).

Për të treguar që $H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$ është surjektive le të marrim $[z] \in H_n(X)$ ku z një n -cikël singular. Ai përmban vetëm një numër të fundmë simpleksesh kështu që duhet të jetë në X^k për ndonjë k . Por kemi treguar që $H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n(X^k)$ është izomorfizëm prandaj $[z]$ duhet të jetë homolog me një cikël simpleks në X^k .

Injektiviteti: nëse z është kufiri i ndonjë zinxhiri, ky zinxhir duhet të ketë imazh kompakt në X^k kështu që $[z]$ është në bërthamën e $H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n(X^k)$ dhe kështu edhe në bërthamën e $H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$. Por ky është një injeksion, prandaj z është një kufi simpleksesh në X^k dhe rrjedhimisht edhe në X .

E vetmja pjesë që mbetet për të e treguar është rasti kur $A \neq \emptyset$ që trajtohet duke përdorur Lemën e Pestë në të dy vargjet e gjata ekzakte të homologjisë relative si për homologjinë simplekse ashtu edhe për atë singulare. \square

Lemë 4.8.4. (Lema e Pestë) Nëse $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ janë izomorfizma në diagramin

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

dhe rreshtat janë vargje ekzakte atëherë γ është izomorfizëm.

Vërtetim. Për të treguar se γ është izomorfizëm tregojmë se është surjektiv dhe injektiv.

Surjektiviteti i γ : Marrim $c' \in C'$. Atëherë kemi që $k'(c') = \delta(d) = \delta k(c) = k'\gamma(c)$ për ndonjë c . Prandaj $k'(c' - \gamma(c)) = 0$ nga rrjedh se $c' - \gamma(c) = j'(b) = j'(\beta(b)) = \gamma j(b)$ për ndonjë b pra $c' = \gamma(c + j(b))$.

Injektiviteti i γ : $\gamma(c) = 0$ implikon se $c = j(b)$ për ndonjë b të tillë që $\beta(b) = i'(a') = i'\alpha(a) = \beta i(a)$ për ndonjë a , kështu që $b = i(a)$ andaj $c = 0$.

Kapitulli 5

Homologjia persistente

Homologjia persistente është një fushë e re që ka filluar të zhvillohet rreth 20 vite më parë. Fillimisht si pjesë e matematikës së pastër, por me kalimin e kohës ka gjetur përdorim në probleme praktike, duke u mbështetur në konceptet kryesore të topologjisë algjebrike dhe asaj kompjutuese.

Ajo lindi në fillim të viteve 2000, kur u shfaq nevoja për të analizuar të dhëna të ndërlikuara dhe të zhurmshme në mënyrë topologjike. Matematikanët Herbert Edelsbrunner, David Letscher dhe Afra Zomorodian ishin ndër të parët që në vitin 2002 prezantuan një metodë për të matur “jetëgjatësinë” e veçorive topologjike duke përdorur filtrime. Prandaj quhet “homologji persistente”, sepse ajo gjurmon se cilat veçori topologjike mbeten të qëndrueshme kur ndryshon niveli i analizës.

Me kohë, kjo ide është kthyer në një mjet të rëndësishëm në Analizën Topologjike të të Dhënave. Në këtë kontekst, homologjia persistente na ndihmon të kuptojmë strukturën e të dhënave duke identifikuar vrimat topologjike që kanë rëndësi dhe që nuk janë vetëm rezultat i zhurmës.

Nga ana matematikore homologjia persistente është një zgjerim i natyrshëm i homologjisë klasike. Në vend që të studiojmë një hapësirë të vetme ndjekim një varg hapësirash që përfshihen njëra në tjetrën dhe shikojmë se si ndryshojnë klasat homologjike përgjatë këtij procesi. Edhe pse mund të tingëllojë më e ndërlikuar në të vërtetë nuk është më e vështirë për t’u llogaritur sesa homologjia klasike.

Homologjia persistente gjen zbatim në fusha si neuroshkenca, mjekësia, biologjia llogaritëse, gjenetika, inteligjenca artificiale, *machine learning* dhe kudo ku nevojitet analizë e strukturave komplekse dhe shumëdimensionale të të dhënave.

Në vijim të këtij kapitulli do të shpjegojmë intuitën gjeometrike të homologjisë persistente, mënyrat vizuale për ta paraqitur atë dhe si mund ta llogaritisim.

Përmbajtja e këtij kapitulli bazohet në masë të konsiderueshme në librin e Ž.Virk [19] si dhe artikujt e Ch.Chen et al. [2] e N.Otter et al. [15].

5.1 Intuita gjeometrike pas homologjisë persistente

Fillimisht do të përshkruajmë intuitën gjeometrike të homologjisë persistente. Kur kemi një kompleks të simplekseve që “rritet”, homologjia persistente përshkruan evoluimin e vrimave të tij. Si shembull do të marrim katër komplekse të simplekseve $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq K_4$ të paraqitura në figurën 5.1.

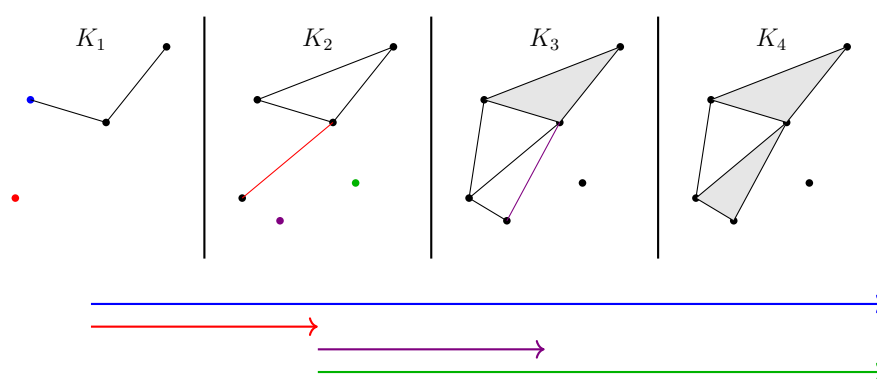


Figura 5.1: Evolucionin e komplekseve të simplekseve dhe interpretimi i homologjisë persistente në dimensionin zero.

Komplekset e simplekseve të njëpasnjëshme $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq K_4$ ndahen nga vijat vertikale. Shigjetat horizontale të vendosura poshtë quhen shirita dhe përbëjnë një barkod. Ato paraqesin persistencën e klasave të homologjisë në dimensionin zero, pra të komponentëve të lidhshmërisë.

Skaji i majtë i secilit shirit përkon me kompleksin ku lind një komponent i lidhur ndërsa skaji i djathtë përkon me kompleksin terminal të atij komponenti. Ngjyra e secilit shirit shfaqet gjithashtu në një kulm (përfaqësuesi i komponentit) dhe në disa raste në një brinjë (brinja që bashkon komponentin me një tjetër dhe kështu e “zhduk” atë). Kjo lidhje mes ngjyrës së shiritit dhe simplekseve në kompleks na ndihmon të kuptojmë rrugën që ndjek një komponent gjatë filtrimit, nga krijimi i tij si kulm, deri te zhdukja përmes një brinje që e bashkon me një komponent tjetër.

Tani do të tregojmë se si mund të interpretojmë barkodin zerodimensional që përshkruan evolucionin e komponentëve të lidhshmërisë, të paraqitur në figurën 5.1.

K_1 : Në K_1 kemi dy komponentë të lidhshmërisë, ky fakt pasqyrohet nga dy shirita (një i kaltërt dhe tjetri i kuq) që shfaqen në atë moment. Përfutjesit e homologjisë në

dimensionin zero - pikat(kulmet) janë ngjyrosur përkatësisht. Vini re se gjeneratori i komponentit të kuq është unik, ndërsa për komponentin tjetër mund të ishte zgjedhur çdo kulm tjetër dhe ta ngjyrosim me të kaltër.

K_2 : Në K_2 kemi tre komponentët të lidhshmërisë, gjë që pasqyrohet nga tre shirita (i kaltër, vjollcë dhe i gjelbër) që shfaqen nga ky moment. Kemi se dy komponentët e pranishëm në K_1 bashkohen dhe njëri prej tyre zhduket. Ne vendosim që komponenti i kuq është ai që zhduket, andaj shiriti i kuq përfundon para kompleksit K_2 . Lidhja që krijohet mes këtyre dy komponentëve është ngjyrosur në të kuqe.

Shënim: Komponentët janë shfaqur në të njëjtën kohë kështu që mund të kishim zgjedhur të përfundonim shiritin e kaltërtë dhe të linim shiritin e kuq të vazhdojë. Barkodi do të mbetet i njëjtë. Megjithatë kur bashkohen komponentë që kanë lindur në momente të ndryshme zbatojmë këtë rregull: komponenti më i vjetër mbijeton.

K_3 : Komponenti me ngjyrë të vjollcë zhduket duke u lidhur me komponentin e kaltër përmes dy brinjëve, njëri prej të cilëve është i ngjyrosur me ngjyrë vjollcë. Pra nga tre komponentë lidhshmërie sa kishim tani mbetën vetëm dy.

K_4 : Në kompleksin K_4 nuk ka ndryshime të reja në komponentët e lidhshmërisë krahasuar me K_3 . Të dy shirita (i kaltri dhe i gjelbri) vazhdojnë në pafundësi.

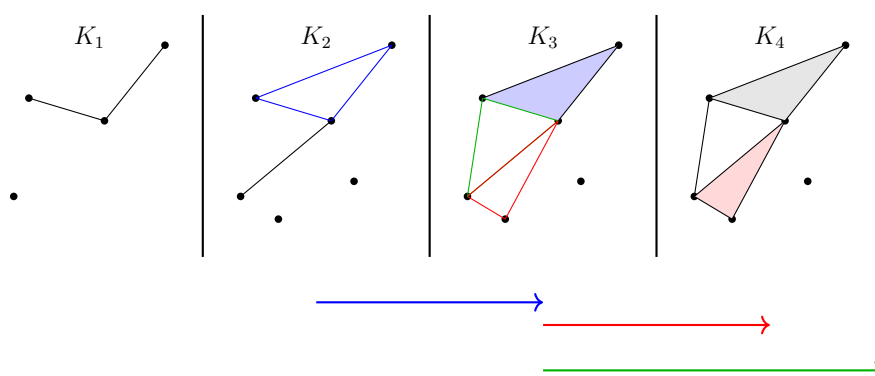


Figura 5.2: Evolucionin e kompleksëve të simplekseve dhe interpretimi i homologjisë persistente në dimensionin e parë.

Në mënyrë të ngjashme do të interpretojmë barkodin përkatës njëdimensional i cili përshkruan klasat e homologjisë të dimensionit një, të paraqitur në figurën 5.2. Në dimensionin një kemi se përfutesit e homologjisë janë ciklet - vrimat, andaj do kërkojmë për to në fazat e evolucionit të kompleksëve.

K_1 : Nuk ekziston asnjë vrimë prandaj nuk ka shirita që shfaqen.

K_2 : Shfaqet një vrimë e cila gjeneron një shirit të kaltër.

K_3 : Vrima me ngjyrë të kaltër bëhet triviale pasi plotësohet brendësia e trekëndëshi dhe si rrjedhojë përfundon shiritit përkatës. Megjithatë shfaqen dy vrima të reja: një me ngjyrë të kuqe dhe një me të gjelbër. Andaj nga ky moment kemi dy shirita.

K_4 : Vrima me ngjyrë të kuqe bëhet triviale andaj dhe shiriti përkatës përfundon, ndërsa shiritit i gjelbër vazhdon deri në infinit.

Qëllimi i këtij kapitulli është të paraqesim bazën teorike që formalizon këtë ide gjeometrike të homologjisë persistente dhe të prezantojmë mënyrën se si mund ta vizualizojmë atë.

5.2 Filtrimi i komplekseve

Përkufizim 5.2.1. *Le të jetë K një kompleks i simplekseve. Një filtrim i kompleksit K është një varg nënkompleksesh:*

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K.$$

Një shembull i një filtrimi është dhënë në figurat 5.1 dhe 5.2.

Homologjia persistente mat se sa gjatë “mbijetojnë” elementet homologjike, si komponentët e lidhshmërisë, vrimat përmes hapave të një filtrimi, pra mat jetëgjatësinë e tyre në kuptimin topologjik.

Një filtrim i një kompleksi të simplekseve K sipas përkufizimit mund të paraqitet si një varg i pasqyrimeve të përfshirjes $i_{s,t} : K_s \hookrightarrow K_t$

$$K_1 \xrightarrow{i_{1,2}} K_2 \xrightarrow{i_{2,3}} \dots \xrightarrow{i_{m-1,m}} K_m = K.$$

Le të jetë \mathbb{F} fushë dhe $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ mund të aplikojmë homologjinë $H_q(_; \mathbb{F})$ për të përftuar një varg grupesh të homologjisë të lidhura me pasqyrime lineare:

$$H_q(K_1; \mathbb{F}) \xrightarrow{(i_{1,2})_*} H_q(K_2; \mathbb{F}) \xrightarrow{(i_{2,3})_*} \dots \xrightarrow{(i_{m-1,m})_*} H_q(K_m; \mathbb{F}) = H_q(K; \mathbb{F}).$$

Për shkak të funktorialitetit të homologjisë kemi: $(i_{s,t})_* = (i_{u,t})_* \circ (i_{s,u})_*$

Përkufizim 5.2.2. Supozojmë se K është një kompleks i simplekseve, \mathbb{F} fushë dhe $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Le të jetë dhënë një filtrim

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$$

i kompleksit K , grupet e homologjisë persistente q -dimensionale me koeficientë në \mathbb{F} janë imazhet e pasqyrimeve

$$(i_{s,t})_* : H_q(K_s; \mathbb{F}) \rightarrow H_q(K_t; \mathbb{F})$$

për çdo $0 \leq s \leq t \leq m$. Rangu i matricave përkatëse $\beta_q^{s,t} = \text{rank}((i_{s,t})_*)$ janë numrat persistentë të Bett-it.

Në procesin e filtrimit çdo shtim i një simpleksi d -dimensional mund të shkaktojë ndryshime. Nëse simpleksi i ri mbyll një cikël ekzistues ai shkakton vdekjen e një elementi homologjik jotrivial në dimensionin $d - 1$.

Në të kundërt nëse krijon një cikël të ri kemi lindjen e një elementi të ri në dimensionin d . Përndryshe nëse simpleksi shtohet pa ndikuar në strukturën ciklike homologjia mbetet e pandryshuar. Kështu çdo hap në filtrim përfaqëson një transformim të mundshëm në strukturën e homologjisë, ku elementet ose vdesin, lindin ose ruajnë strukturen e tyre.

Si në homologjinë klasike me koeficientë në një fushë, edhe grupet e homologjisë persistente përcaktohen deri në izomorfizëm. Megjithatë, rangi i homomorfizmit $(i_{s,t})_*$, që korrespondon me imazhin e pasqyrimit $i_{s,t}$ përcakton vetëm dimensionin e imazhit të këtij pasqyrimi. Ky rang jep informacion mbi sasinë e veçorive topologjike që “persistojnë” mes niveleve të filtrimit, por nuk përcakton në mënyrë unike nënhapësirën specifike të $H_q(K_t; \mathbb{F})$ që përfaqëson homologjinë persistente.

Pra edhe pse e dimë dimensionin e imazhit dhe numrin e vrimave që mbijetojnë në një shkallë të caktuar të filtrimit, struktura specifike dhe përbërja e nëngrupit të homologjisë persistente mbetet e paqartë vetëm në bazë të rangut. Prandaj, homologjia persistente konsiderohet si një nëngrup i veçantë i $H_q(K_t; \mathbb{F})$ që përmban informacion më të detajuar sesa thjesht numrat persistentë të Bett-it.

Baza e këtij nëngrupit përbëhet nga përfaqësues specifikë të klasave homologjike, të cilët gjenerojnë grupin e homologjisë persistente dhe reflektojnë mënyrën se si veçoritë topologjike lindin, evoluojnë dhe zhduken gjatë procesit të filtrimit.

Një filtrim i vetëm rezulton në një tabelë të numrave persistentë të Bett-it.

Shembull 5.2.3. Për çdo fushë \mathbb{F} , tabelat e mëposhtme paraqesin numrat persistentë të Bett-it zerodimensional dhe njëdimensional që i përkasin filtrimit të paraqitur në figurën 5.3.

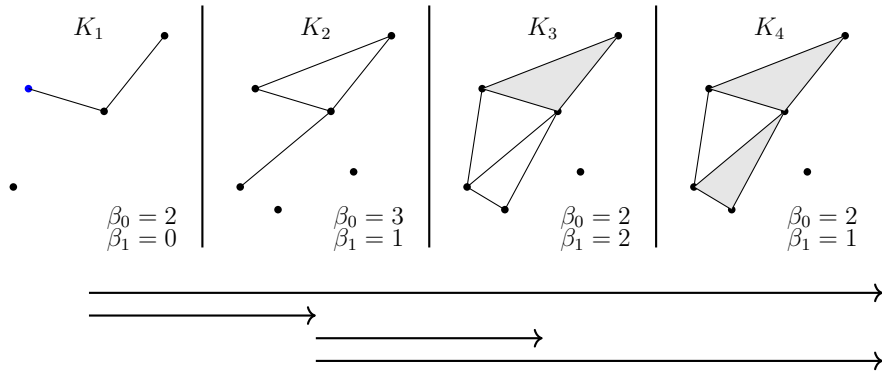


Figura 5.3: Një filtrim $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq K_4$ dhe numrat përkatës të Bett-it.

Në këto tabela, s dhe t përfaqësojnë nivelet e filtrimit, ndërsa $\beta_{s,t}^k$ tregon numrin e klasave të homologjisë në dimensionin k që lindin në momentin s dhe vdesin në momentin t .

$s \setminus t$	1	2	3	4
1	2	2	1	1
2		3	2	2
3			2	2
4				2

$s \setminus t$	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2		1	0	0
3			2	1
4				1

Të shohim tani se si mund t'i interpretohen këta numra në mënyrë gjeometrike:

- $\beta_{2,3}^0 = 2$ do të thotë se dy nga komponentët e K_2 mbesin ende të palidhur në K_3 .
- $\beta_{3,4}^1 = 1$ do të thotë që një lak në K_3 mbetet jotrivial (pra nuk është mbyllur) edhe në K_4 . Një mënyrë më precize për ta formuluar këtë është: hapsira e elementeve homologjike njëdimensionale në $H_1(K_4; \mathbb{F})$ që kanë përfaqësues në $C_1(K_3; \mathbb{F})$ ka dimension një.
- $\beta_{2,3}^1 = 0$ nënkupton se të gjitha elementet e homologjisë njëdimensionale në $H_1(K_2; \mathbb{F})$ janë trivial në K_3 .

Edhe pse tabelat e numrave persistentë të Bett-it janë të dobishme ekzistojnë mënyra të tjera për të vizualizuar zhvillimin e grupeve të homologjisë përgjatë një filtrimi. Një nga këto vizualizime që tashmë e kemi prezantuar është barkodi.

5.3 Vizualizimi i homologjisë persistente

Në këtë pjesë do të fiksojmë një fushë \mathbb{F} , $q \in \{0, 1, \dots\}$, një filtrim

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K,$$

dhe $1 \leq s < t \leq m$.

5.3.1 Barkodi

Barkodi është prezantuar më parë në mënyrë gjeometrike. Tani do të japim përkufizimin formal.

Barkodi është një mënyrë për të vizualizuar zhvillimin e grupeve të homologjisë gjatë një filtrimi. Numrat persistentë të Bett-it $\beta_{s,t}^q$ tregojnë dimensionin e hapësirës së elementeve të homologjisë në K_t që kanë një përfaqësues në K_s . Andaj $\beta_{s,t}^q$ tregon numrin e elementeve që mbijetojnë nga faza K_s deri në fazën K_t . Për ta shprehur ndryshe, $\beta_{s,t}^q$ është dimensionin i hapësirës $H_q(K_s; \mathbb{F}) / \ker(i_{s,t})_*$.

Barkodet japin informacione më të detajuara përmes shiritave. Shiriti $[s, t)$ tregon një element të homologjisë që lind në fazën s dhe vdes në fazën t .

Le ta formulojmë këtë në mënyrë formale:

- Numri i shiritave që përmbajnë s dhe kalojnë përmes t është $\beta_{s,t}$.
- Homologjia që lind në s e përkufizojmë si $H_q(K_s; \mathbb{F}) / (\text{Im } i_{s-1,s})_*$, ku $(i_{0,t})_*$ është pasqyrimi trivial. Dimensionin i saj është $\beta_{s,s} - \beta_{s-1,s}$ dhe përfaqëson numrin e shiritave që fillojnë në s .
- Homologjia që përfundon në t është e definuar si $\ker(i_{t-1,t})_*$. Dimensionin i saj është $\beta_{t-1,t-1} - \beta_{t-1,t}$ pasi $\ker(i_{t-1,t})_* \cong H_q(K_{t-1}; \mathbb{F}) / \text{Im}(i_{t-1,t})_*$. Dimensionin përfaqëson numrin e shiritave që përfundojnë në t .
- Kemi se $\beta_{s,t} - \beta_{s-1,t}$ përfaqëson dimensionin e elementeve të homologjisë që lindin në K_s dhe mbijetojnë në K_t . Pra:

$$\beta_{s,t} - \beta_{s-1,t} = \dim (\text{Im}(i_{s,t})_* / \text{Im}(i_{s-1,t})_*)$$

Përfaqëson numrin e elementeve të homologjisë në $H_q(K_t; \mathbb{F})$ që kanë një përfaqësues në K_s por jo në K_{s-1} . Kjo është ekuivalente me numrin e shiritave që fillojnë në s dhe kalojnë përmes t .

- Numri $n_{s,t} = \beta_{s,t-1} - \beta_{s-1,t-1} - (\beta_{s,t} - \beta_{s-1,t})$ përfaqëson dimensionin e homologjisë që lind në s dhe përfundon pikërisht në t . Pra $n_{s,t}$ përfaqëson numrin e elementeve të homologjisë që kanë lindur në s , kanë qenë aktive deri në $t - 1$, por që nuk mbijetojnë në t . Pra është numri i shiritave që fillojnë në s dhe përfundojnë në t andaj karakteristikat topologjike përkatëse zhduken pikërisht në atë moment.
- Përkufizojmë $n_{s,\infty} = \beta_{s,m} - \beta_{s-1,m}$ që përfaqëson dimensionin e homologjisë që lind në s dhe është aktive deri edhe në fund të filtrimit.

Barkodi q - dimensional përbëhet nga intervale të formës:

- $[s, t)$ për $1 \leq s < t \leq m$ dhe
- $[s, \infty)$ për $1 \leq s < m$.

Kur flasim për barkodin këto intervale i quajmë shirita. Një barkod mund të përmbajë disa ose asnjë kopje të secilit shirit. Fiksojmë $1 \leq s < t \leq m$:

- Numrin e intervaleve të formës $[s, t)$ e shënojmë me $n_{s,t}$
- Numrin e intervaleve të formës $[s, \infty)$ e shënojmë me $n_{s,\infty}$

Shembull 5.3.1. Kthehemi përsëri te shembulli i filtrimit në figurën 5.1.

$\beta_{s,t}^0 \rightarrow$	$s \backslash t$	1	2	3	4
	1	2	1	1	1
	2		3	2	2
	3			2	2
	4				2

Nga tabela e numrave të Bett-it të dimensionit zero, kemi që:

$$n_{2,3} = (\beta_{2,2} - \beta_{1,2}) - (\beta_{2,3} - \beta_{1,3}) = (3 - 1) - (2 - 1) = 1$$

Si rezultat, ekziston një shirit i vetëm i formës $[2, 3)$ siç është paraqitur edhe në figurë. Në mënyrë të ngjashme njehsojmë: $n_{1,2} = n_{1,\infty} = n_{2,\infty} = 1$ dhe $n_{1,3} = n_{1,4} = n_{2,4} = n_{3,4} = n_{3,\infty} = n_{4,\infty} = 0$

Një barkod përfaqëson persistencën e elementeve të homologjisë. Sa më i gjatë të jetë një shirit aq më gjatë është i pranishëm elementi homologjik përkatës gjatë procesit të filtrimit.

Në shumicën e rasteve një element homologjik me presistencë më të lartë ka rëndësi më të madhe, domethënë një veçori topologjike më të theksuar. Mirëpo ka edhe raste kur informacioni i vlefshëm gjendet te shiritat më të shkurtër sidomos kur ata janë të shumtë dhe të shpërndarë në mënyrë të veçantë.

5.3.2 Diagrami i presistencës

Një tjetër mënyrë e njohur për të vizualizuar homologjinë persistente është diagrami i presistencës, të cilin do ta përkufizojmë në vazhdim. Duke pasur një barkod të dhënë si më herët, një interval i formës $[s, t)$ mund të mendohet si një dyshe e pikave dhe të vizualizohet si një pikë $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Ashtu siç mund të ketë disa shiritat me të njëjtat skaje në një barkod po ashtu mund të ketë disa kopje të së njëjtës pikë të vizualizuar në të njëjtin vend në një diagram të presistencës. Ndërsa këta shiritat mund të shfaqen si një grumbull vertikal këtë nuk mund ta bëjmë me pikat. Për këtë arsye çdo pikë (s, t) në një diagram të tillë konsiderohet si një pikë me peshë $n_{s,t}$.

Një pikë e formës (s, ∞) që i korrespondon një shiriti $[s, \infty)$ nuk mund të vizatohet drejtpërdrejt në diagram. Prandaj zgjidhet një koordinatë y mbi maksimumin k të boshtit y që përdorim në diagram, në të shumtën e rasteve zgjedhim $k+1$ për të vepruar si përfaqësues i ∞ . Kjo do të thotë se shiriti $[s, \infty)$ përfaqësohet nga pika $(s, k+1)$. Për këtë pikë kemi se pesha e saj është $n_{s,\infty}$.

Si përfundim fitojmë një koleksion pikash me peshë në rrafsh që e quajmë diagram të presistencës. Një shembull i tillë paraqitet në figurën 5.4.

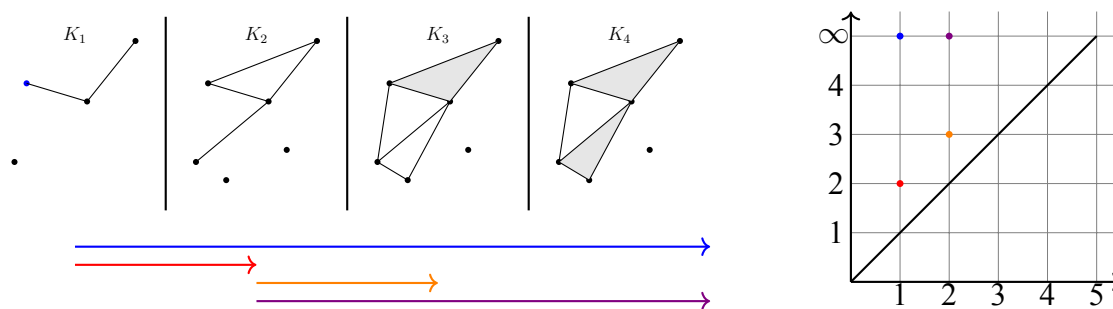


Figura 5.4: Filtrim së bashku me barkodin në dimensionin zero dhe diagrami i presistencës. Ngjyrat e shiritave të barkodi korrespondojnë me ngjyrat e pikave përkatëse në diagram.

Një barkod dhe një diagram i presistencës përmbajnë saktësisht të njëjtin informacion. Ndërsa persistenca e një shiriti matet përmes gjatësisë së tij, persistenca e një pike në

diagramin e persistencës matet nga largësia ndaj diagonales $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Të gjitha pikat e diagrami ndodhen mbi diagonalen Δ .

Nëse do të ekzistonin shirita të formës $[s, s)$ pra me gjatësi zero, ata do të ishin shiritat më të shkurtër dhe do të korrespondoheshin me pikat diagonale (s, s) . Kjo pikëpamje do të jetë e dobishme në kontekstin e stabilitetit. Megjithatë, këta shirita ose pika zakonisht nuk paraqiten në vizualizimin e homologjisë persistente, pasi nuk kontribuojnë në mënyrë domethënëse në analizën topologjike të të dhënave.

Diagramet e persistencës janë shpesh mënyra më e preferuar e vizualizimit të homologjisë persistente sidomos kur numri i pikave është i madh, shpërndarja e tyre përfaqësohet mirë përmes këtyre diagrameve. Nga ana tjetër kur numri i tyre është i vogël një barkod është shpesh më përshkrues.

5.4 Llogaritja e homologjisë persistente

Peshat $n_{s,t}$ të pikave në diagramet e persistencës shprehen formalisht përmes numrave presitentë të Bett-it, ekziston një algoritëm për t'i përcaktuar ato drejtpërdrejt pa iu referuar numrave të Bett-it dhe $k(k+1)/2$ rangut të matricave përkatëse të pasqyrimeve. Në vazhdim do të paraqesim një versionin të këtij algoritmi.

Në këtë pjesë do të fiksojmë një fushë \mathbb{F} dhe një filtrim

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K.$$

Parametri $q \in \{0, 1, \dots\}$ do të paraqesë dimensionin e objektit që do të shqyrtojmë.

Tani do të përshkruajmë reduktim e matricës duke përdorur vetëm veprime në shtylla nga e majta, të ngjashme me eliminimin e Gauss-it.

1. *Renditja e simplekseve sipas filtrimit:* Për çdo dimension q do të rendisim të gjitha q -simplekset sipas radhës që shfaqen në filtrimin. Nëse disa shfaqen në të njëjtin hap renditja e tyre nuk ndikon në homologjinë persistente.
2. *Ndërtimi i matricave të kufijve:* Përdorim renditje nga 1 për të ndërtuar matricat e kufijve M_q për çdo q .
3. *Reduktimi i matricës M_q :* Për çdo q matrica M_q reduktohet nga e majta duke përdorur vetëm një lloj transformimi mbi shtylla - shtimin e një shumëfishi nga fusha \mathbb{F} të ndonjë shtyllë në shtyllën që po trajtohet. Më konkretisht, procedura është si më poshtë:

- (a) Gjejmë pivotin pra elementin e parë jotrivial nga poshtë-lart në atë shtyllë.
- (b) Nëse ndonjë kolonë më majtas ka pivot të njëjtin rresht zbresim shumëfishin përkatës të asaj shtylle në mënyrë që pivoti aktual të zhduket ose të zhvendoset më lart në kolonë.
- (c) Përsërisim këtë hap derisa të mos ketë më përputhje të pivotëve në të majtë.

Pas këtij procesi për çdo q fitojmë matricën e reduktuar M'_q . Çdo kolonë në këtë matricë është ose zero ose ka një pivot dhe secili pivot ndodhet në një rresht të ndryshëm nga të gjithë pivotët e tjerë.

Në këtë pikë kemi informacion të mjaftueshëm për të nxjerrë homologjinë e kompleksit K_m nga numri i pivotëve, pasi rangi i një matrice është numri i pivoteve të saj në formën e reduktuar dhe rangi mjaftojn për të llogaritur numrat e Bett-it. Mirëpo mund të përdorim edhe pozicionet e pivotëve për të nxjerrë $n_{s,k}$ që nevojiten për të ndërtuar barkodin dhe diagramin e persistencës.

Për ta kuptuar më mirë këtë proces le të kujtojmë se si ndërtohet filtrimi hap pas hapi, duke shtuar një nga një simplekset. Duke pasur një kompleks të simplekseve shtimi i një q -simpleksi të vetëm mund të ndryshojë homologjinë në dy mënyra:

- Nëse kufiri i një q -simpleksi është një kombinim linear i kufijve të q -simpikseve të tjera atëherë ai simpleks krijon një element të ri jotrivial në homologjinë me dimension q . Në këtë rast themi se ka lindur një simpleks. Këtu shtylla përkatëse në matricën e kufirit reduktohet në shtyllë zero.
- Nëse kufiri i tij nuk mund të shprehet si kombinim linear i kufijve të simpikseve të tjera me të njëjtin dimension atëherë ai simpleks shënon fundin e një elementi jotrivial në homologjinë me dimension $q - 1$. Kjo ndodh kur shtylla e re në matricën e kufirit nuk reduktohet në shtyllë zero. Në këtë rast themi se ka vdekur një simpleks.

Një filtrim mund të shihet si një varg zgjerimesh i simplekseve të njëpasnjëshme. Në çdo hap të filtrimit supozojmë se fillimisht shtojmë të gjitha pikat sipas rendit të përmendur më parë, pastaj të gjitha brinjët dhe kështu me radhë. Duke ndjekur këtë renditje përgjatë gjithë filtrimit përfitojmë një varg zgjerimesh që na japin matricat e kufirit M_q dhe matricat e reduktuara M'_q .

Bazuar në këtë renditje çdo simpleks në kompleksin K ose lind, ose vdes. Tani jemi në gjendje të ndërtojmë diagramin e persistencës dhe barkodin.

Për çdo q -simpleks τ që vdes ekziston një $(q - 1)$ -simpleks σ që lind, i cili përputhet me pivotin në kolonën përkatëse të τ , pra, kemi një lindje në çifte. Kjo dyshe përfaqëson

një shirit $[s, t)$ në barkod ose një pikë në diagramin e persistencës (s, t) , ku s dhe t janë hapat në të cilët τ, σ janë shtuar në filtrim. Pikat për të cilat vlen $s = t$ nuk përfshihen në vizualizim sepse ato përfaqësojnë vrima me jetëgjatësi zero gjë që nuk kanë vlerë në analizën të persistencës.

Çdo simpleks që lind që nuk është dyshe me ndonjë simpleks që vdes përfaqëson një segment $[s, \infty)$ në barkod ose një pikë $(s, k + 1)$ në diagramin e persistencës ku k është numri total i hapave në filtrim.

Ndonjëherë na intereson jo vetëm të dimë kur lind dhe vdes një klasë homologjie, por edhe cilët zinxhirë i përfaqësojnë keto klasa. Këta përfaqësues mund të nxirren nga procesi i reduktimit të matricave të kufijve.

Le të konsiderojmë një shirit që fillon në filtrimin ku shfaqet simpleksi σ dhe përfundon në filtrimin ku zhduket simpleksi τ .

- Kur një shtyllë që përfaqëson një zinxhir σ reduktohet në zero, kjo do të thotë se ekziston një kombinim linear i disa shtyllave të tjera pra kufiri i σ anulohet. Andaj kemi $\partial\sigma = \sum_i l_i \partial\sigma_i = 0$ pra $a = s - \sum_i l_i \sigma_i$ është një cikël sepse kufiri i tij është zero. Ky cikël quhet përfaqësues i lindjes dhe ai përfaqëson një klasë homologjie $[a]$ që lind në momentin kur shtohet zinxhiri σ në filtrimin.

Kjo klasë $[a]$ është një përfaqësuese e re në homologji që u krijua nga shtimi i simpleksit σ por ajo nuk është e vetmja. Nëse ekziston një klasë tjetër $[b]$ e të njëjtit dimension që ishte tashmë prezente para se të shtohet σ atëherë edhe kombinimi $[a + b]$ përfaqëson një klasë homologjie që lindi në atë moment. Pra klasa $[a]$ është një përfaqësuese e veçantë që ne zgjedhim si përfaqësuese e lindjes, por çdo kombinim me një klasë ekzistuese po ashtu mund të shihet si një klasë që “lindi” me shtimin e σ . Kjo tregon që në homologji një “lindje” nuk është gjithmonë e përcaktuar në mënyrë të vetme, pra ka më shumë se një mënyrë për ta parë këtë ‘lindje’, varësisht nga përfaqësuesit që zgjedhim.

- Përfaqësuesi terminal përkufizohet nga kolona që i korrespondon τ -së në matricën e reduktuar.

Këta përfaqësues zakonisht nuk përfaqësojnë të njëjtën klasë homologjie. Përfaqësuesi i lindjes mund të mos jetë një përfaqësues i mirë i shiritit përkatës, në kuptimin që mund të jetë jotrivial pas shfaqjes së simpleksit terminal përkatës. Intervallet e pafundme nuk kanë një përfaqësues terminal. Prandaj ne e definojmë përfaqësuesin e një shiriti në këtë mënyrë: Nëse shiriti është një interval i kufizuar përfaqësuesi i shiritit është përfaqësuesi terminal.

Ndërsa nëse shiriti është një interval i pafund përfaqësuesi i shiritit është përfaqësuesi i lindjes.

Le të tregojmë që jetëgjatësia e klasës së homologjisë së përfaqësuesit terminal β përputhet me jetëgjatësinë e shiritit përkatës: $[\beta]$ shfaqet në momentin kur shfaqet σ sipas ndërtimit. Nëse një përfaqësues β' i $[\beta]$ do të shfaqej para σ atëherë shtylla që i korrespondon τ -së mund të ishte reduktuar më tej në β' duke eliminuar pivotin e etiketuar si σ gjë që do është kontradiksion. Gjithashtu $[\beta]$ bëhet triviale në momentin kur shfaqet τ sipas përkufizimit, por edhe sikur $[\beta]$ të bëhej triviale më herët atëherë shprehja e saj si kufi do të mund të ishte përdorur për të reduktuar shtyllën τ në shtyllën zero, një tjetër kontradiksion.

Ndonjëherë nuk ndjekim plotësisht zgjedhjen standarde algjebrike për përfaqësuesit e shiritave 0-dimensionale dhe kur shiriti është i kufizuar ne zgjedhim përfaqësuesin e lindjes si përfaqësues të shiritit.

Le ta shpjegojmë këtë përjashtim përmes një shembulli konkret. Supozojmë që çifti $\{b\}, \{a, b\}$ krijojnë një shirit 0-dimensional. Ndonjëherë për arsye gjeometrike dëshirojmë ta mendojmë këtë shirit si përfaqësues të komponentit që përmban pikën b i cili pastaj bashkohet me një komponent tjetër më të madh (atë që përmban pikën a). Për këtë arsye edhe pse shiriti ka një fund në zgjedhim $\{b\}$ si përfaqësues të tij, sepse kjo përputhet me mënyrën se si e mendojmë këtë sipas intuitës gjeometrike.

Megjithatë duhet pasur parasysh që elementi homologjik $[\{b\}]$ nuk bëhet trivial (nuk shuhet) kur shtohet $\{a, b\}$. Në vend të kësaj ajo që ndodh është se $\{a\}$ dhe $\{b\}$ bëhen homologjikisht të barabartë, pra $[\{a\}] = [\{b\}]$, e jo që $[\{b\}]$ bëhet zero.

Shembull 5.4.1. Do të llogarisim homologjinë persistente të shembullin të njohur tashmë, nga figura 5.1. Kompleksin e simplekseve që do të përdorim është dhënë në figurën 5.5.

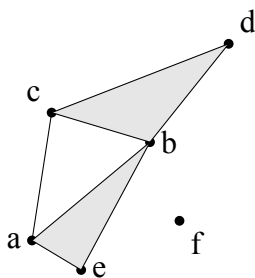


Figura 5.5: Kompleksi i simplekseve

Rendi në të cilin janë shtuar simplekset vërehet qartë nga matricat e kufirit në vazhdim. Në këto matrica vijat vertikale dhe horizontale ndihmojnë për të dalluar se cilat simplekse i përkasin fazave të filtrimit. Puna jonë bazohet në dy matricat e kufirit, të cilat përshkruajnë

lidhjet ndërmjet komplekseve të simplekseve. Për të nxjerrë informacionin topologjik nga këto matrica, bëjmë reduktimin e tyre.

Për të thjeshtuar simbolikën nuk do i shkruajmë $\{ , \}$ për simplekset, andaj për shembull 1-simpleksin $\{a, b\}$ do e shënojmë me ab .

$$M_1 = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc|cc} bc & bd & ab & cd & ac & ae & be \\ \hline & & -1 & & -1 & -1 & \\ -1 & -1 & 1 & & & & -1 \\ 1 & & & -1 & 1 & & \\ \hline & 1 & & \textcircled{1} & & & \\ & & & & & 1 & 1 \end{array} \right) \quad M_2 = M'_2 = \begin{array}{c} bc \\ bd \\ ab \\ cd \\ ac \\ ae \\ be \end{array} \left(\begin{array}{c|c} bcd & abe \\ \hline 1 & \\ -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \textcircled{1} & \\ \hline & \\ & -1 \\ & \textcircled{1} \end{array} \right)$$

Reduktojmë matricën M_1 pasi matrica M_2 veçse është në formë të reduktuar, pasi të dy kolonat e matricës kanë pivotë në pozita të ndryshme.

	<i>bc</i>	<i>bd</i>	<i>ab</i>	<i>cd</i>	<i>ac</i>	<i>ae</i>	<i>be</i>
<i>a</i>			-1		-1	-1	
<i>b</i>	-1	-1	1				-1
<i>c</i>	1			-1	1		
<i>d</i>		1		$\textcircled{1}$			
<i>e</i>						1	1
<i>f</i>							

Deri te kolona e simpleksit cd , asnjëra nga kolonat nuk ka pivot në të njëjtën pozitë me ndonjëren nga kolonat paraprake. Mirëpo kolona cd ka pivot në të njëjtën pozitë me kolonën bd , prandaj e zëvendësojmë cd me $cd - bd$. Si rezultat, përfitojmë matricën:

	<i>bc</i>	<i>bd</i>	<i>ab</i>	<i>cd - bd</i>	<i>ac</i>	<i>ae</i>	<i>be</i>
<i>a</i>			-1		-1	-1	
<i>b</i>	-1	-1	1	1			-1
<i>c</i>	1			$\textcircled{-1}$	1		
<i>d</i>		1					
<i>e</i>						1	1
<i>f</i>							

Vërejmë përsëri se kolona $cd - bd$ ka pivot në të njëjtën pozitë me kolonën bc . Për të shmangur praninë e dy pivotëve në të njëjtën pozitë, kolonës $cd - bd$ i shtojmë kolonën bc . Andaj, kolona $cd - bd + bc$ bëhet triviale.

	bc	bd	ab	$cd - bd + bc$	ac	ae	be
a			-1		-1	-1	
b	-1	-1	1				-1
c	1				①		
d		1					
e						1	1
f							

Në hapat në vazhdim, kryejmë veprimet $ac - bc$ dhe $ac - bc + bd$ dhe si rezultat kemi që kolona $ac - bc + bd$ është triviale.

	bc	bd	ab	$cd - bd + bc$	$ac - bc$	ae	be
a			-1		-1	-1	
b	-1	-1	1		①		-1
c	1						
d		1					
e						1	1
f							

	bc	bd	ab	$cd - bd + bc$	$ac - bc + bd$	ae	be
a			-1			-1	
b	-1	-1	1				-1
c	1						
d		1					
e						1	①
f							

Kolona ae ka pivot në rreshtin e , ndërkohë që asnjë nga kolonat paraprake nuk ka pivot në këtë pozitë. Po ashtu, kolona bc ka pivot në të njëjtin rresht, ndaj zbrisim kolonat be dhe ae

për ta eliminuar këtë përsëritje.

	bc	bd	ab	$cd - bd + bc$	$ac - bc + bd$	ae	$be - ae$
a			-1			-1	1
b	-1	-1	1				-1
c	1						
d		1					
e						1	
f							

Në mënyrë të ngjashme, kolonës $be - ac$ ia shtojmë kolonën ab .

	bc	bd	ab	$cd - bd + bc$	$ac - bc + bd$	ae	$be - ae + ab$
a			-1			-1	
b	-1	-1	1				
c	1						
d		1					
e						1	
f							

Tani matrica është plotësisht e reduktuar, pasi të gjithë pivotët e kolonave përkatëse ndodhen në pozita të ndryshme.

Mund të fillojmë të ndërtojmë barkodin për dimensionin 0 duke analizuar çiftet lindje-vdekje dhe pikat që nuk janë pjesë e ndonjë dyshe pikash, pra janë simplekse që nuk vdesin kurrë.

- Dyshet (c, bc) dhe (d, bd) nuk japin kontribut në barkod, pasi të gjitha këto simplekse shfaqen në të njëjtin hap të filtrimit (K_1). Prandaj, ato kontribuojnë vetëm me një interval bosh $[1, 1)$.
- Dyshet (b, ab) krijon një shirit 0-dimensional $[1, 2)$, i përfaqësuar nga $[b]$. Kjo sepse b shfaqet në fazën K_1 të filtrimit, ndërsa ab shfaqet në K_2 . Ky shirit përfaqëson jetëgjatësinë e komponentit të lidhshmërisë që përfshin pikën b , para se të bashkohet me pikën a përmes brinjës ab .
- Dyshja (e, ae) krijon një shirit 0-dimensional $[2, 3)$, i përfaqësuar nga $[e]$.
- Pikat a dhe f nuk janë pjesë e ndonjë dyshe pikash me ndonjë simpleks tjetër, që do të thotë se ato nuk janë bashkuar me ndonjë komponent tjetër gjatë filtrimit. Prandaj,

ato kontribuojnë me shirita që zgjasin pafund: $[1, \infty)$ i gjeneruar nga $[a]$ dhe $[2, \infty)$ i gjeneruar nga $[f]$.

Matrica e kufirit M_2 na lejon të nxjerrim barkodin për vrimat njëdimensionale, bëjmë një analizë të ngjashme me atë si më sipër.

- Dyshja (cd, bcd) krijon një shirit 1-dimensional $[2, 3)$. Ky shirit përfaqësohet nga klasa homologjike $[cd - bd + bc]$ sepse gjatë reduktimit të kolonës së simpleksit cd në matricën e kufirit, kemi kryer këto veprime: $cd - bd + bc$ dhe si rezultat kolona përkatëse është shndërruar në kolonë triviale - pra kolonë zero. Kjo do të thotë që operatori i kufirit vepron në këtë kombinim linear dhe na jep rezultatin zero, pra $\partial(cd - bd + bc) = 0$, andaj $cd - bd + bc$ është cikël.
- Dyshja (be, abe) krijon një shirit 1-dimensional $[3, 4)$. Ky shirit përfaqësohet nga klasa homologjike $[be - ae + ab]$.
- Brinja ac nuk është dyshe me ndonjë simpleks tjetër, që do të thotë se kontribuon me shiritin e pafundmë $[3, \infty)$ i përfaqësuar nga klasa $[ac - ab - bc]$.

Tani do tregojmë një trik që ndihmon në përshpejtimin e përlllogaritjes së homologjisë persistente i cili bazohet në faktin se matricat e kufirit M_i që reduktohen gjatë procesit të homologjisë nuk janë tërësisht të pavarura nga njëra-tjetra.

Kur reduktojmë një shtyllë në matricën e kufirit M_q që i përket një simpleksi terminal τ ne marrim një informacion të vlefshëm që na lejon të përshpejtojmë algoritmin.

Së pari nëse τ është simpleks terminal atëherë ai është ai që vret një klasë homologjike. Kjo nënkupton që rreshti përkatës në matricën M_{q+1} do të reduktohet në një rresht zero dhe për këtë arsye mund të vendoset si zero menjëherë pa pasur nevojë të reduktohet gjatë algoritmit. Së dyti pozicioni i pivotit në kolonën e reduktuar për τ tregon se cili simpleks σ e ka krijuar atë klasë homologjike (pra është simpleksi i lindjes). Si rezultat kolona përkatëse e σ në matricën M_{q-1} do të jetë zero dhe mund të vendoset si e tillë që në fillim pa u reduktuar fare.

Pra vetëm nga një reduktim i një kolone që i përket një simpleksi terminal τ marrim katër informacione: τ është terminal, rreshti i τ në M_{q+1} është trivial, pivoti σ tregon një simpleks që lind dhe shtylla e σ në M_{q-1} është zero.

Ky informacion është veçanërisht i dobishëm për përshpejtimin e algoritmit nëse nuk është shfrytëzuar tashmë në ndonjë hap të mëparshëm të reduktimit. Për këtë arsye rekomandohet që reduktimi i matricave M_q të bëhet sipas rendit zbritës të dimensionit q . Në

këtë mënyrë kur të jemi duke reduktuar matricën M_q sigurohemi që kolonat në M_{q-1} nuk janë trajtuar ende dhe kështu shmangim reduktime të panevojshme. Në praktikë, kjo metodë ndihmon të shmangim reduktimin e gati gjysmës së shtyllave duke sjellë përmirësime të ndjeshme në kompleksitetin e algoritmit për llogaritjen e homologjisë persistente.

Në vazhdim do të shohim një formë të matricës së kufirit të filtrimit që merret si kombinim i të gjitha matricave të kufirit në secilin dimension, për të cilën do të përdorim algoritmin për llogaritjen e homologjinë persistente.

Shembull 5.4.2. Do të llogarisim homologjinë persistente të filtrimit të komplekseve të dhënë në figurën 5.6.

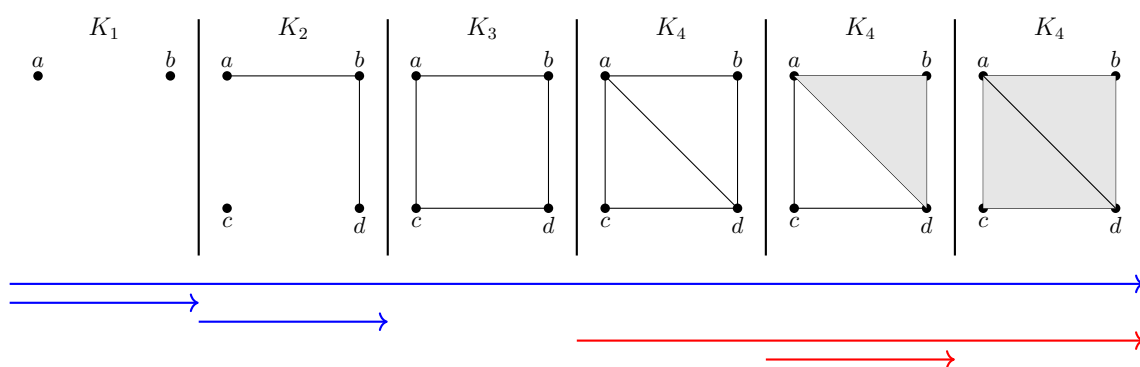


Figura 5.6: Filtrimi i komplekseve dhe barkodi.

Në këtë shembull do të punojmë në fushën \mathbb{Z}_2 . Formojmë një lloj matrice katrore që është një lloj kombinim i matricave të kufirit në secilin dimension ku rreshtat dhe shtyllat përbëhen nga simplekset. Simplekset janë renditur në atë mënyrë që janë shfaqur gjatë filtrimit. Vijat vertikale dhe horizontale i ndajnë mjaft qartë fazat e filtrimit të komplekseve. Matrica përbëhet nga elementet 1 dhe 0 por për të mos e ngarkuar shënimin 0 nuk i shënojmë fare. Vërejmë se trekëndshi i poshtëm i matricës është gjithmonë zero, prandaj do të na duhet të bëjmë vetëm reduktimin e trekëndëshit të sipërm.

Për reduktimin e matricës do përdorim algoritmin si në vazhdim.

Algorithm 1 Reduktimi i matricës së kufirit (mod 2)

- 1: **for** çdo kolonë j nga 1 deri në numrin e kolonave **do**
 - 2: **while** ekziston ndonjë kolonë $k < j$ e tillë që $\text{pivot}(k) = \text{pivot}(j)$ **do**
 - 3: Shto kolonën k te kolona j (mod 2): $\partial_j := \partial_j + \partial_k$
 - 4: **end while**
 - 5: **end for**
-

Kufiri i kulmeve a, b, c, d është thjesht bosh prandaj dhe shtyllat për këto elemente janë triviale, ndërsa kufiri i brinjës ab përbëhet nga kulmet a dhe b andaj në rreshtat përkatës të

tyre te shtylla ab kemi vendosur 1. Ngjashëm në këtë mënyrë dhe për simplekset e tjera.

	a	b	c	d	ab	bc	ad	cd	ac	abc	acd
a					1		1		1		
b					1	1					
c						1		1	1		
d							①	①			
ab										1	
bc										1	
ad											1
cd											1
ac											1
abc										1	
acd											

Fillojmë duke shqyrtuar kolonat një nga një. Vërejmë se katër kolonat e para janë triviale, pra nuk përmbajnë ndonjë vlerë jozero, andaj nuk kemi nevojë të bëjmë ndonjë veprim. Kolonat që i korrespondojnë simplekseve ab , bc dhe ad përmbajnë vlera jozero por pozitat e tyre të pivotëve nuk ndodhen në rreshtat e njëjtë me pivotët e kolonave paraprake. Prandaj nuk është i nevojshëm ndonjë veprim shtesë. Ndërsa në kolonën që i korrespondon simpleksit cd , pivoti i saj ndodhet në të njëjtin rresht me pivotin e kolonës ad . Andaj kolonës cd i shtojmë kolonën ad . Pra pivotët që ndodhen në të njëjtin rresht anulohen dhe fitohet një kolonë e reduktuar.

	a	b	c	d	ab	bc	ad	$cd + ad$	ac	abc	acd
a					1		1	1	1		
b					1	1					
c						①		①	1		
d							1				
ab										1	
bc										1	
ad											1
cd											1
ac											1
abc										1	
acd											

Në mënyrë të ngjashme kolona që i korrespondon simpleksit $cd+ad$ ka pivot në të njëjtin rresht me kolonën bc . Për ta eliminuar këtë përputhje, kolonës $cd + ad$ i shtojmë kolonën bc . Si rrjedhim pivotët në të njëjtin rresht anulohen dhe kolona përkatëse reduktohet.

	a	b	c	d	ab	bc	ad	$cd + ad + bc$	ac	abc	acd
a					1		1	1	1		
b					①	1		①			
c						1			1		
d							1				
ab										1	
bc										1	
ad											1
cd											1
ac											1
abc										1	
acd											

Në mënyrë të ngjashme kolonës që i korrespondon $cd + ad + bc$ i shtojmë kolonën ab , pasi pivotët e tyre ndodhen në të njëjtin rresht. Si rezultat fitojmë një kolonë triviale, përkatësisht $cd + ad + bc + ab$.

	a	b	c	d	ab	bc	ad	$cd + ad + bc + ab$	ac	abc	acd
a					1		1		1		
b					1	1					
c						①			①		
d							1				
ab										1	
bc										1	
ad											1
cd											1
ac											1
abc										1	
acd											

Në mënyrë të ngjashme vazhdojmë këtë proces deri sa matrica të jetë e reduktuar, pra të

gjithë pivotët të ndodhen në rreshta të ndryshëm.

	a	b	c	d	ab	bc	ad	$cd + ad + bc + ab$	$ac + bc + ab$	abc	$acd + abc$
a					1		1				
b					①	1					
c						①					
d							①				
ab										1	1
bc										1	1
ad											1
cd											①
ac											
abc										①	
acd											

Tani do të tregojmë se si mund të lexojmë barkodin dhe diagramin e persistencës duke u bazuar në matricën e reduktuar. Le të fillojmë me homologjinë një-dimensionale (shiritat me ngjyrë të kuqe). Përfutjesit për këtë janë ciklet që kanë kufi zero, të cilat në matricën tonë përfaqësohen nga kolonat triviale, përkatësisht ato që nuk përmbajnë asnjë pivot.

Konsiderojmë kolonën që përfaqëson shumën e brinjëve $cd + ad + bc + ab$. Duke vepruar me operatorin e kufirit kemi se rezultati është zero që do të thotë se kjo kolonë gjeneron një cikël prandaj përfaqëson një veçori topologjike një-dimensionale. Kjo veçori lind në filtrimin K_3 në momentin kur shfaqet brinja cd . Për të përcaktuar momentin e zhdukjes së saj, shikojmë rreshtin përkatës të cd dhe gjejmë pivotin në kolonën $acd + abc$. Prandaj, kjo veçori vdes në K_6 kur formohet një 2-simpleks që e mbulon atë. Andaj në barkod vizatojmë një shirit që fillon në K_3 dhe mbaron në K_6 .

Kolona që përfaqëson shumën e brinjëve $ac + bc + ab$ është triviale. Brinja ac është ajo që shfaqet e para në këtë kombinim, andaj shikojmë rreshtin e ac dhe gjejmë pivotin në kolonën abc . Kjo tregon se veçoria përkatëse lind në K_4 dhe vdes në K_5 , kështu që barkodi përfshin një shirit nga K_4 në K_5 .

Kalojmë tani në homologjinë zerodimensionale (shiritat me ngjyrë të kaltër). Kolona për kulmin a është triviale dhe nuk ka pivot në rreshtin përkatës, që do të thotë se ky komponent i lidhshmërisë lind në K_1 dhe nuk vdes, pra vizatojmë një shirit që fillon nga K_1 deri në pafundësi.

Kolona për elementin b është gjithashtu triviale, por në rreshtin përkatës b ka pivot në

kolonën ab . Kjo nënkupton se komponenti i lidhshmërisë b bashkohet me a në K_2 , kështu që barkodi do të përfshijë një shirit nga K_1 në K_2 .

Kolona c është triviale por pivoti ndodhet në rreshtin c brenda kolonës bc , që nënkupton se c lind dhe vdes në të njëjtën fazë (K_2). Meqenëse kjo veçori nuk kontribuon në analizën topologjike të hapësirës, nuk vizatojmë ndonjë shirit për të në barkod. Në mënyrë analoge për elementin d kemi një shirit që fillon në K_2 dhe përfundon në K_3 .

Tani, çdo shirit të formës $[s, t)$ në barkod i korrespondojmë pikën (s, t) në diagramin e persistencës. Ndërsa shiritave të formës $[s, \infty)$ u korrespondojmë pikat $(s, t + 1)$, ku t përfaqëson fazën e fundit të filtrimit të përfshirë në analizë, që është 6.

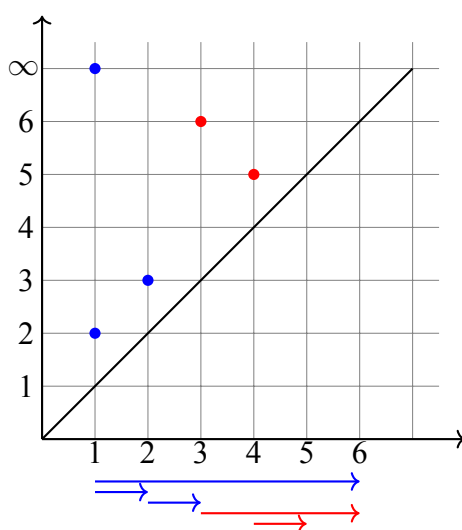


Figura 5.7: Diagrami i persistencës dhe barkodi, ku ngjyra e kaltër i korrespondon homologjisë zero dhe ngjyra e kuqe homologjisë së parë.

Kapitulli 6

Konstruktimi i komplekseve të simplekseve

Në analizën topologjike të të dhënave, objektet me interes rrallë herë na jepen drejtpërdrejt si komplekse të simplekseve. Zakonisht, të dhënat paraqiten si *point cloud*. Prandaj hapi i parë është ndërtimi i një kompleksi të simpleksve nga kjo bashkësi, i cili duhet të ruajë sa më mirë strukturën dhe formën e të dhënave dhe të jetë i qëndrueshëm ndaj ndryshimeve të vogla në to. Kjo na mundëson që të shndërrojmë të dhënat në një filtrimi të simplekseve, që më pas përdoret për të analizuar strukturën e tyre përmes homologjisë persistente.

Përmbajtja e këtij kapitulli bazohet në masë të konsiderueshme në librat e Ž.Virk [19], T.Dey dhe Y.Wang [4] si dhe temën e diplomës së R.Garcia [6].

6.1 Komplekset Rips

Një nga mënyrat më të thjeshta për të ndërtuar një kompleks të simplekseve nga një bashkësi e fundme pikash është përmes kompleksit Rips.

Përkufizim 6.1.1. *Le të jetë X një hapësirë metrike dhe $S \subset X$ një nënbashkësi e fundme. Për një shkallë $r \geq 0$, kompleksi Rips $\text{Rips}(S, r)$, është një kompleks i simplekseve abstrakte, i cili plotëson rregullat:*

1. *Bashkësia e kulmeve është S .*
2. *Një nënbashkësi $\sigma \subseteq S$ formon një simpleks nëse $\text{Diam}(\sigma) \leq r$.*

Diametri i një bashkësie të fundme $A \subset X$ është $\text{Diam}(A) = \max_{x,y \in A} d(x,y)$, ndërsa diametri i X është $\text{Diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$, ku d është metrika në hapësirën X .

Komplekset Rips njihen gjithashtu si komplekset e Vietoris–Rips-it.

Në figurën 6.1 është ilustruar një shembull se si formohen komplekset Rips nga një bashkësi me pesë pika të shpërndara në një rrafsh. Për vlera të ndryshme të parametrut r , rreth secilës pikë vizatohen rrethë me rreze $r/2$, që ndihmojnë në vizualizimin e lidhjeve mes pikave.

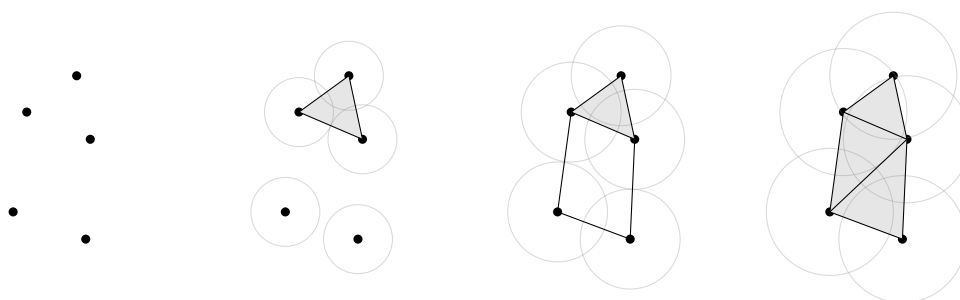


Figura 6.1: Pesë pika në rrafsh dhe tri komplekset Rips $\text{Rips}(S, r)$ korresponduese.

Kur dy rrethë preken ose priten, formohet një brinjë mes pikave përkatëse, që do të thotë se largësia mes tyre është më e vogël ose e barabartë me r . Nëse kemi tri pika ku secila dyshe e pikave është e lidhur me një brinjë, atëherë këto tri pika së bashku formojnë një trekëndësh, pra një 2-simpleks, shih figurën 6.2.

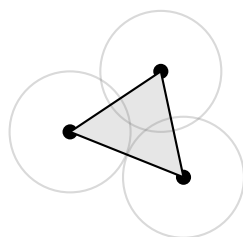


Figura 6.2: Tri pika në rrafsh të cilat formojnë një trekëndësh - kompleksin Rips për një rreze r që është më e madhe ose e barabartë me distancën maksimale mes dy pikave.

Kështu, me rritjen graduale të rrezes r , formohen gjithnjë e më shumë lidhje: fillimisht brinjë, pastaj trekëndësha, dhe më tej simplekse të dimensioneve më të larta. Kompleksi bëhet gjithnjë e më i dendur. Nëse r rritet mjaftueshëm, konkretisht sa diametri i bashkësisë, atëherë kompleksi Rips bëhet simpleksi i plotë mbi bashkësinë S . Për vlera edhe më të mëdha të r , kompleksi Rips nuk është më planar dhe eventualisht bëhet katërdimensional. Disa veti të komplekseve Rips:

1. Komplekset Rips janë shpesh zgjedhja më e preferuar në Analizë Topologjike të të Dhënave pasi janë të lehta për llogaritje.
2. Kur r është më e vogël se distanca më e vogël mes dy pikave në S , $Rips(S, r)$ është një grup i ndarë, që do të thotë se nuk ka brinjë ose simplekse të dimensioneve të larta.
3. Për çdo r të paktën po aq të madh sa diametri i S , pra distanca më e madhe mes çifteve të pikave në S , kompleksi Rips $Rips(S, r)$ është $(|S| - 1)$ -simpleks.
4. Nëse $r_1 \leq r_2$ atëherë $Rips(S, r_1) \subseteq Rips(S, r_2)$.

Përkufizim 6.1.2. *Le të jetë X një hapësirë metrike dhe $S \subseteq X$ një nënbashkësi e fundme. Filtrimi Rips mbi S është koleksioni i komplekseve të simplekseve abstrakte $\{Rips(S, r)\}_{r \geq 0}$ me përfshirjet:*

$$i_{r_1, r_2} : Rips(S, r_1) \hookrightarrow Rips(S, r_2) \quad \text{për çdo } r_1 \leq r_2.$$

Më përgjithësisht një filtrim i një kompleksi të simplekseve K është një familje nënsimpleksesh $\{K_r\}_{r \geq 0}$ të indeksuara nga një parametër r ku për çdo $r < r'$ kemi $K_r \subseteq K_{r'}$.

Një filtrim Rips ofron koleksionin e të gjitha komplekseve Rips mbi S . Ndërsa një kompleks i vetëm Rips varet nga zgjedhja e shkallës, filtrimi nuk varet.

Shembull 6.1.3. Do të shohim ndërtimin e filtrimit Rips për një bashkësi prej 100 pikash që janë një përafrim i rrethit, shih figurën 6.3. Fillimisht, kur rrezja r është shumë e vogël, çdo pikë qëndron e izoluar dhe nuk ka lidhje me pikat e tjera. Andaj kompleksi i Rips-it përbëhet thjesht nga një bashkësi e pikave pra 0-simplekset.

Me rritjen e rrezes r , pikat që janë afër njëra-tjetrës fillojnë të lidhen përmes brinjëve (1-simplekset), duke krijuar lidhje mes tyre. Këto lidhje shfaqen kur largësia mes dy pikave bëhet më e vogël ose e barabartë me r .

Kur r rritet edhe më shumë, formohen trekëndësha (2-simplekse) mbi grupime prej tri pikash që janë të lidhura plotësisht, domethënë aty ku ekziston një brinjë mes çdo dyshe pikash në grup.

Me rritjen e mëtejshme të r , figura bëhet gjithnjë e më komplekse: lidhjet mes pikave shtohen, krijohen më shumë trekëndësha, dhe kompleksi fillon të pasqyrojë më qartë formën globale të pikave, që në këtë rast është një formë rrethore. Ajo që është veçanërisht

interesante është se në këtë fazë, në mes të kompleksit mund të dallohet një hapësirë boshe pra një vrimë topologjike, e cila është karakteristikë e rrethit.

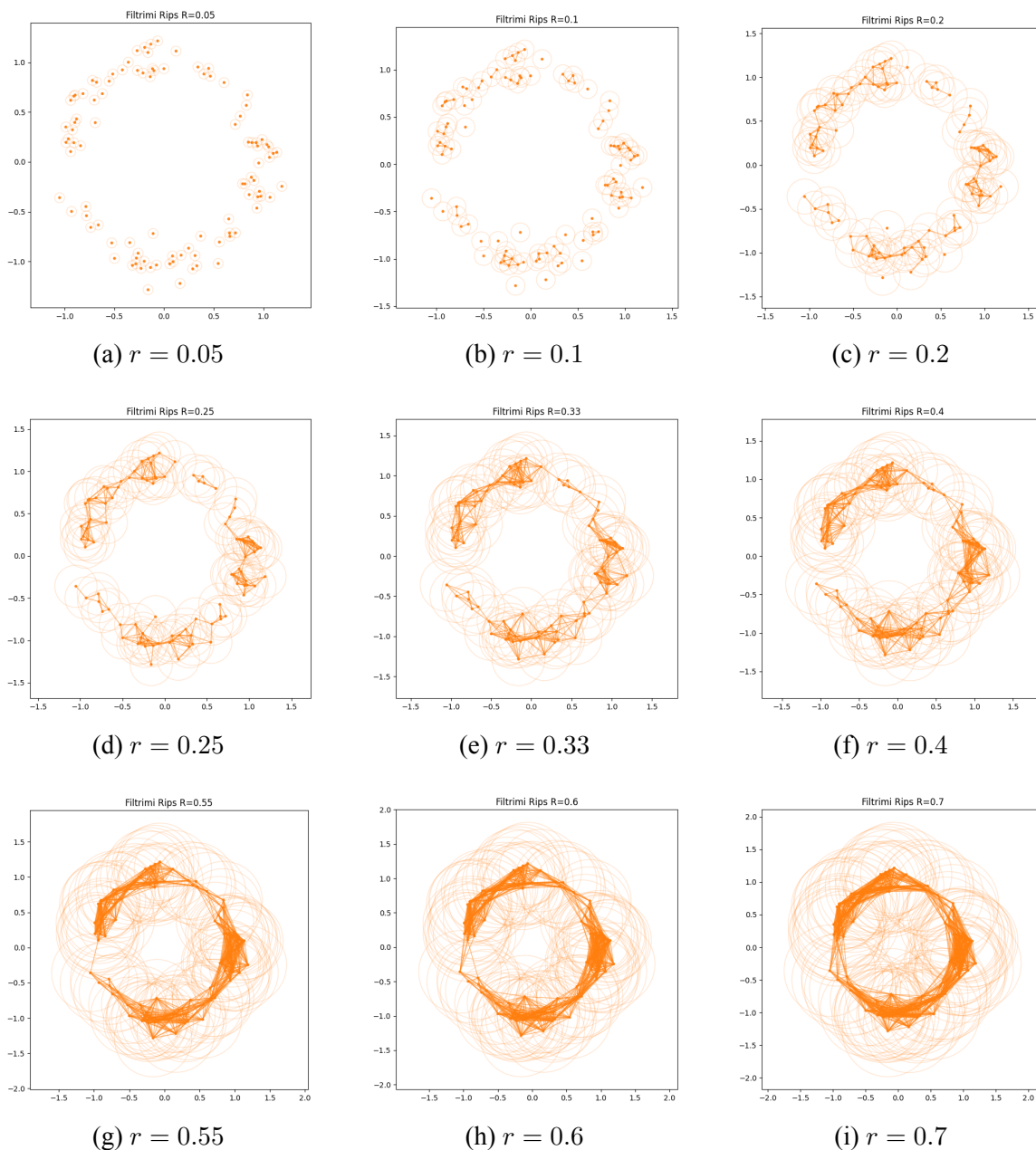


Figura 6.3: Filtrimi Rips për bashkësinë e pikave që janë përafrim i rrethit.

Kjo vrimë është një nga veçoritë që kapen nga homologjia e rendit të parë H_1 , që mat ciklet e mbyllura që nuk mbushen nga trekëndësha. Ndërsa r rritet edhe më tej, kjo vrimë eventualisht “mbyllet”, pasi trekëndëshat mbulojnë hapësirën boshe dhe kompleksi përfundon duke u bërë gjithnjë e më i lidhur derisa të arrijë një strukturë shumë të dendur.

6.2 Komplekset e Čehut

Përkufizim 6.2.1. *Le të jetë X një hapësirë metrikë dhe $S \subseteq X$ një nënbashkësi e fundme. Zgjidhim një shkallë $r \geq 0$. Kompleksi i Čehut $Cech(S, r)$ është një kompleks i simplekseve abstrakte i përcaktuar nga rregullat e mëposhtme:*

1. Bashkësia e kulmeve është S .
2. Një nënbashkësi $\sigma \subseteq S$ është një simpleks atëherë dhe vetëm atëherë nëse $\bigcap_{x \in \sigma} B(x, r) \neq \emptyset$.

Në figurën 6.4 është ilustruar një shembull i kompleksit të Čehut. Dy pika lidhen përmes një 1-simpleksi (pra, formohet një brinjë) nëse rrathët përkatës me rreze r rreth tyre preken ose mbivendosen, pra nëse ekziston një zonë ku rrathët priten.

Për tri pika që të formojnë një 2-simpleks (një trekëndësh të mbushur), nuk mjafton që secila dyshe prej tyre të ketë ndërprerje, por duhet që të tre rrathët të kenë një zonë të përbashkët ku mbivendosen të gjitha njëherësh. Vetëm atëherë trekëndëshi konsiderohet me brendinë e tij në kompleksin e Čehut.

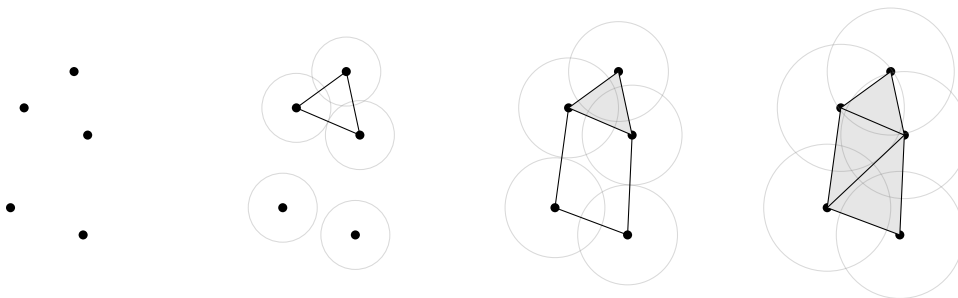


Figura 6.4: Pesë pika në rrafsh dhe tri komplekse të Čehut, $Cech(S, r)$.

Disa veti për komplekset e Čehut:

1. Komplekset e Čehut janë më të vështira për t'u llogaritur, por ato janë interesante për shkak të interpretimit gjeometrik që ofrojnë. Ky interpretim gjeometrik do të shpjegohet më vonë në kontekstin e komplekseve të nervit.
2. Për r më të vogël se gjysma e distancës më të vogël mes dy pikave në S , kompleksi $Cech(S, r)$ është një bashkësi diskrete.
3. Për r që është të paktën dy herë sa distanca më e madhe mes dy pikave në S , kompleksi $Cech(S, r)$ është një $(|S| - 1)$ -simpleks.

4. Nëse $r_1 \leq r_2$, atëherë $Cech(S, r_1) \subseteq Cech(S, r_2)$.
5. Thjesht tregohet se $Cech(S, r) \subseteq Rips(S, 2r)$. Pasi nëse rrethi me rreze r rreth çdo pike është i ndërprerë me një tjetër, atëherë distanca mes këtyre dy pikave është më e vogël ose e barabartë me $2r$. Kjo do të thotë që çdo simpleks në $Cech(S, r)$ është gjithashtu një simpleks në $Rips(S, 2r)$, prandaj $Cech(S, r) \subseteq Rips(S, 2r)$.

Përkufizim 6.2.2. *Le të jetë X një hapësirë metrike dhe $S \subseteq X$ një nënbashkësi e fundme. Filtrimi i Čehut për S është koleksioni i komplekseve të simplekseve abstrakte $\{Cech(S, r)\}_{r \geq 0}$ me përfshirjet:*

$$i_{r_1, r_2} : Cech(S, r_1) \hookrightarrow Cech(S, r_2), \quad \text{për çdo } r_1 \leq r_2.$$

Shembull 6.2.3. Në figurë 6.5 janë paraqitur tri pika dhe rrathët përkatës me rreze $\delta/2$. Tani, le të krahasojmë si ndërtohen komplekset Rips dhe Čehut për këto pika.

Në kompleksin Rips, krijohet një 2-simpleks (një trekëndësh i mbushur) pasi secila dyshe pikash është më pak se δ larg njëra-tjetrës.

Në kompleksin e Čehut, kushti është më i fortë pasi për të formuar një 2-simpleks kërkohet që të tre rrathët të kenë një zonë të përbashkët ku mbivendosen të gjitha njëherësh. Në shembullin tonë, prerja e përbashkët e tre rrathëve është boshe, edhe pse çdo dyshe pikash priten (pra, formohen 1-simplekse), mungesa e një zone të përbashkët e të tre rrathëve bën që të mos formohet trekëndëshi i mbushur. Si rezultat, në kompleksin e Čehut kemi thjesht një trekëndësh të zbrazët, i përbërë vetëm nga tri brinjë (1-simplekset).

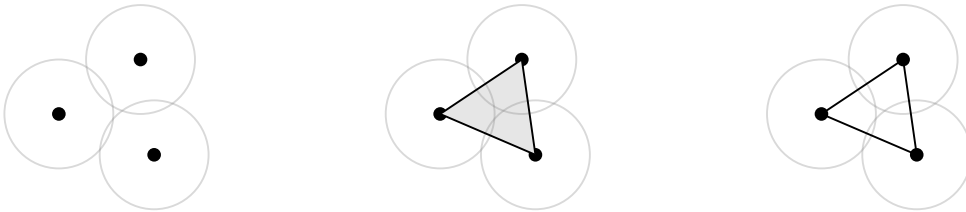


Figura 6.5: Kompleksi Rips dhe i Čehut përkatësisht për tri pikat e dhëna.

Vërejtje 6.2.4. *Në praktikë, përdoret më shpesh kompleksi Rips sesa kompleksi i Čehut. Edhe pse kompleksi i Čehut ka përparësi teorike sepse ruan më saktë strukturën topologjike të hapësirës, ndërtimi i tij është më i ndërlikuar: për të krijuar një k -simpleks, duhet të kontrollohet nëse $(k + 1)$ kanë një prerje të përbashkët. Nga ana tjetër, kompleksi Rips është shumë më i thjesht për t'u llogaritur, pasi kërkon vetëm të llogariten distancat dyshe mes pikave. Për këtë arsye, Rips përdoret më shpesh në aplikimet kompjuterike dhe në analizën e të dhënave topologjike.*

6.3 Kompleksi i nervit

Komplekset e Čehut janë një rast special i konstruktimit klasik topologjik të quajtur nerva.

Përkufizim 6.3.1. Për $k \in \mathbb{N}$, le të jetë $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ një koleksion i nënbashkësive të X . Nerva e U është kompleks i simplekseve abstrakte $N(U)$, i cili përkufizohet sipas rregullave:

1. Bashkësia e kulmeve është $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$, që përbëhet nga k elemente.
2. Një nënbashkësi $\sigma \subseteq U$ është një simpleks atëherë dhe vetëm atëherë nëse $\bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset$.

Një kompleks i Čehut është nervi i koleksionit përkatës të rrethëve me rreze r , pra $Cech(S, r) = \mathcal{N}(\{B(s, r)\}_{s \in S})$.

Një nga përparsitë kryesore të komplekseve të nervit është se në disa raste lloji i homotopisë i këtyre komplekseve përfaqëson unionin e elementeve të \mathcal{U} . Kjo është formuluar në Teoremën e Nervit.

Teoremë 6.3.2 (Teorema e Nervit). Le të jetë $n \in \mathbb{N}$ dhe supozojmë që koleksioni $U = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ përbëhet nga nënbashkësi të mbyllura dhe konvekse të \mathbb{R}^n , atëherë:

$$U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k \simeq N(U).$$

Vërtetim. Për thjeshtsi, le të supozojmë se nervi ka dimension 1, domethënë të gjitha prerjet e trefishta të bashkësive të \mathcal{U} janë të boshe. Vërtetimi i plotë është më teknik, por analog me atë që do ta shqyrtojmë për këtë rast.

Le të jetë $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$ dhe $Z \subseteq X \times N(\mathcal{U})$ si:

$$Z = \bigcup_{s \in N(\mathcal{U})} \left(\bigcap_{s \in \sigma} U_s \times \sigma \right).$$

Do të tregojmë se $Z \simeq X$ dhe $Z \simeq N(\mathcal{U})$.

Tregojmë se $Z \simeq X$. Për çdo $x \in X$ kemi që $\{x\} \times N(\mathcal{U}) \cap Z$ është një simpleks në nerv, që është formuar nga të gjitha $s \in S$ për të cilat $x \in U_s$. Duke kontraktuar çdo simpleks të tillë në një pikë kemi se për çdo $x \in X$ fitojmë një deformim të Z në X , pra $Z \simeq X$.

Tregojmë se $Z \simeq N(\mathcal{U})$. Për çdo $y \in N(\mathcal{U})$ kemi se $(X \times \{y\}) \cap Z$ është një bashkësi kontraktibile sipas supozimeve. Fillimisht kontraktojmë seksionet e këtij lloji për të gjithë y që nuk janë kulme dhe më pas përfundojmë duke kontraktuar të gjitha seksionet për kulmet. Ne fitojmë një deformim të Z në $N(\mathcal{U})$, pra $Z \simeq N(\mathcal{U})$.

Një rast i veçantë i vërtetimit është ilustruar përmes figurave 6.6, 6.7 dhe 6.8.

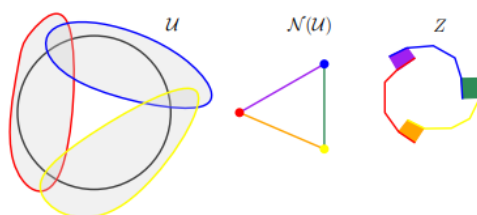


Figura 6.6: Një koleksion \mathcal{U} i nënbashkësive të rrethit $X = S^1$ (majtas), nervi përkatës (në qendër) dhe hapësira Z e ndërtuar në vërtetimin (djathtas). Bashkësitë e \mathcal{U} janë ilustruar si nënbashkësi të rrafshit për qartësi, ndërkohë që formalisht \mathcal{U} përbëhet nga prerjet me X .

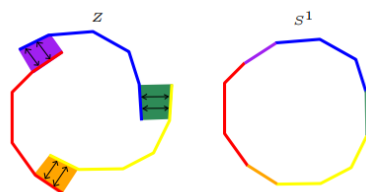


Figura 6.7: Për të treguar se $Z \simeq S^1$, kontraktojmë seksionet mbi pikat e $x \in X$ në Z që përkojnë me brinjët në kompleksin e nervit (kontraktimi përgjatë shigjetave të shënuara majtas) për të marrë S^1 .

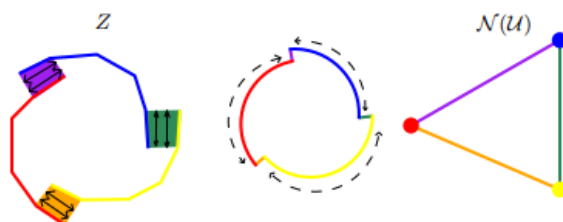


Figura 6.8: Për të treguar se $Z \simeq N(\mathcal{U})$, fillimisht kontraktojmë seksionet mbi pikat që nuk janë kulme $y \in N(\mathcal{U})$ në Z (kontraktimi përgjatë shigjetave të shënuara majtas) për të marrë hapësirën në qendër. Përfundojmë duke kontraktuar seksionet mbi kulmet $y \in N(\mathcal{U})$ në Z (kontraktimi përgjatë shigjetave të theksuara në qendër) për të marrë $N(\mathcal{U})$ (djathtas).

Teorema e Nervit nuk vlen për një koleksion të çfarëdoshëm të nënbashkësive, siç është paraqitur edhe në figurën 6.9.

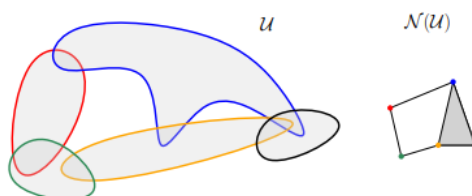


Figura 6.9: Një shembull i një nervi.

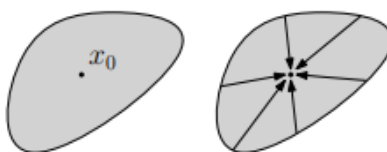
Teorema e Nervit është e vlefshme në një formë më të përgjithshme. Për shembull, supozojmë që çdo prerje e fundme të bashkësive të \mathcal{U} (duke përfshirë çdo $U \in \mathcal{U}$, pasi ajo shfaqet si prerja e $\{U\} \subseteq \mathcal{U}$) është ose boshe, ose kontraktibile. Nëse \mathcal{U} është një koleksion i mbyllur i nënbashkësive në \mathbb{R}^n ose një koleksion i hapur i bashkësive në një hapësirë metrike, atëherë:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \simeq N(\mathcal{U}).$$

Ky është një pohim më i fortë sesa Teorema e Nervit, nga lema:

Lemë 6.3.3. *Le të jetë $n \in \mathbb{N}$. Çdo nënbashkësi konvekse e \mathbb{R}^n është kontraktibile.*

Vërtetim. Supozojmë që $A \subseteq \mathbb{R}^n$ është konvekse dhe $x_0 \in A$. Ne mund ta lëvizim çdo $a \in A$ në x_0 përgjatë segmentit nga a në x_0 . Kjo jep homotopinë $H(a, t) = (1-t)a + tx_0$, mes pasqyrimin identitet mbi A dhe pasqyrimin konstante në x_0 , pra A është kontraktibile.



Teorema e nervit ofron një përshkrim homotopik të kompleksit të Čehut. Pasi rruzujt euklidian janë konveks, marrim:

$$\text{Cech}(S, r) = N(\{B(s, r)\}_{s \in S}) \simeq \bigcup_{s \in S} B(s, r),$$

Ky fakt është arsyeja kryesore pse përdoren komplekset e Čehut edhe pse ato janë më të vështira për t'u llogaritur sesa komplekset Rips.

6.4 Vetitë e ndërthurjes

Kur kemi një nënbashkësi të fundme të një hapësire metrike, kemi parë që mund të ndërtojmë komplekse të simplekseve (si Rips apo Čehut) mbi atë bashkësi. Por, kur flasim për komplekse e simplekseve abstrakte, ato janë objekte diskrete, pra nuk mund të përcaktojmë në mënyrë të natyrshme një distancë të vazhdueshme mes tyre.

Ndërkohë bashkësia e pikave dhe parametri i shkallës r janë të vazhdueshëm, ku r është një numër real pozitiv që mund të ndryshojë në mënyrë të vazhdueshme. Ekzistojnë mënyra për të matur distancën mes dy bashkësive të fundme në një hapësirë metrike. Por për shkak të natyrës diskrete të komplekseve të simplekseve, ndërtimi i tyre ka shpesh “kërcime” të papritura, pra ndryshime të papritura kur r ndryshon.

Shembull 6.4.1. Le të jetë $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Vërejmë se kompleksi Rips $\text{Rips}(X, r)$ ndryshon në mënyrë jo të vazhdueshme në varësi të shkallës.

- Për $r < 1$, dy pikat janë shumë larg për të qenë të lidhura, prandaj kompleksi përmban vetëm dy pika (0-simplekse).
- Për $r = 1$, distanca mes 0 dhe 1 është pikërisht 1, prandaj ndërtohet një lidhje mes tyre, pra formohet një 1-simpleks (brinjë).

Megjithatë mund të përkufizojmë një distancë mbi filtrime, në mënyrë që filtrimi për një bashkësi pikash të jetë një funksion i vazhdueshëm në raport me bashkësinë e pikave dhe parametrin e shkallës r .

Përkufizim 6.4.2. Le të jetë $\varepsilon > 0$. Dy filtrime $\{A_r\}_{r \geq 0}$ dhe $\{B_r\}_{r \geq 0}$ të ndërtuara përmes konstruktimit të Ripsit ose Čehut quhen ε - ndërthurura nëse ekzistojnë pasqyrimet simplekse $\varphi_r : A_r \rightarrow B_{r+\varepsilon}$ dhe $\psi_r : B_r \rightarrow A_{r+\varepsilon}$ ashtu që $\varphi_{r+\varepsilon} \circ \psi_r : B_r \rightarrow B_{r+2\varepsilon}$ dhe $\psi_{r+\varepsilon} \circ \varphi_r : A_r \rightarrow A_{r+2\varepsilon}$ janë të barabarata me përfshirjet përkatëse.

Përkufizimet e pasqyrimeve mund të vizualizohen përmes diagramit komutativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & A_r & \longrightarrow & A_{r+\varepsilon} & \longrightarrow & A_{r+2\varepsilon} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \searrow & \nearrow & & & & \\
 & & & \psi_r & \varphi_r & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & \nearrow & \searrow & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & B_r & \longrightarrow & B_{r+\varepsilon} & \longrightarrow & B_{r+2\varepsilon} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \psi_{r+\varepsilon} & \varphi_{r+\varepsilon} & & & &
 \end{array}$$

Përkufizim 6.4.3. Le të jenë dy filtrime, distanca e tyre e ndërthurjes është përcaktuar si infimumi i të gjitha vlerave $\varepsilon > 0$, për të cilat filtrimet janë ε -ndërthurura.

Pra për filtrimet Rips dhe të Čehut për koleksionet të mbyllura pikash të fundme, distanca e ndërthurjes është një metrikë mbi bashkësinë e filtrimeve. Ndërsa kujtojmë se nuk ka një metrikë gjeometrikisht kuptimplote mbi bashkësinë e komplekseve të simplekseve të fundme.

Shembull 6.4.4. Le të jenë $X = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ dhe $Y = \{0.1, 1.2\} \subseteq \mathbb{R}$.

Filtrimi Rips për X , $Rips(X, r)$ përbëhet nga:

- dy pika për $r < 1$;
- një brinjë për $r \geq 1$.

Filtrimi Rips për Y , $Rips(Y, r)$ përbëhet nga:

- dy pika për $r < 1.1$;
- një brinjë për $r \geq 1.1$.

Andaj kemi se filtrimet janë 0.1-ndërthurura.

Koncepti i ndërthurjes do të ketë një rol të rëndësishëm më vonë në kontekstin e stabilitetit të homologjisë persistente. Në këtë pikë, mund ta përdorim për të formuluar dy rezultate të rëndësishme.

Teoremë 6.4.5. *Le të jetë $\varepsilon > 0$ dhe $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ dy bashkësi me k pika secila, të tilla që për çdo i vlen $d(x_i, y_i) \leq \varepsilon$. Atëherë:*

- i) Filtrimet Rips të X dhe Y janë 2ε -ndërthurura.
- ii) Filtrimet e Čehut të X dhe Y janë ε -ndërthurura.

Vërtetim. Drejtpërdrejt nga jobarazimi i trekëndëshit, nëse një nënbashkësi $\sigma \subseteq X$ ka diametër r , atëherë nënbashkësia përkatëse $\tau \subseteq Y$, e përbërë nga pikat me të njëjtat indekse si ato në σ , ka diametër jo më të madh se $r + 2\varepsilon$. Pra nëse σ është një simpleks në $Rips(X, r)$ atëherë τ është një simpleks në $Rips(Y, r + 2\varepsilon)$.

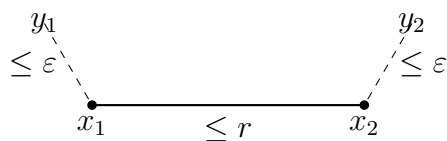


Figura 6.10: Nëse $d(x_1, x_2) \leq r$ dhe $d(x_i, y_i) \leq \varepsilon$ atëherë $d(y_1, y_2) \leq r + 2\varepsilon$.

Pasqyrimet që marrin çdo pikë x_i nga X dhe e dërgojnë në y_i në Y formojnë një pasqyrim simpleks $Rips(X, r) \rightarrow Rips(Y, r + 2\varepsilon)$. Kjo do të thotë se për çdo simpleks në filtrimin Rips të X ekziston një simpleks përkatës në filtrimin Rips të Y , me një ndryshim të vogël në diametër, që është 2ε .

Po ashtu pasqyrimet që marrin çdo pikë y_i nga Y dhe e dërgojnë në x_i në X janë gjithashtu simplekse dhe formojnë pasqyrimin $Rips(Y, r) \rightarrow Rips(X, r + 2\varepsilon)$. Kjo tregon se edhe për çdo simpleks në filtrimin Rips të Y ekziston një simpleks në filtrimin Rips të X , me një diametër që është $r + 2\varepsilon$.

Të dyja këto pasqyime është e qartë se komutojnë me përfshirjet, andaj konkludojmë se filtrimet Rips të X dhe Y janë të 2ε -ndërthurura (dyfish të ndërthurura).

Ngjashëm tregohen për rastin e filtrimeve të Čehut.

□

Kështu mund të përfundojmë se kur bëjmë ndryshime të vogla në bashkësinë e pikave, filtrimet që krijohet nuk ndryshojnë shumë. Kjo do të thotë se konstruktimi i filtrimit është stabil. Kjo është e rëndësishme, sepse na siguron që edhe nëse bashkësia e pikave ndryshon pak, filtrimet që krijojmë mbeten të ngjashme dhe të besueshme.

Në mënyrë të ngjashme, mund të shpjegojmë marrëdhënien mes filtrimeve Rips dhe Čehut. Edhe këto dy filtrime janë të lidhura ngushtë me njëra-tjetrën dhe përmbajnë informacione të ngjashme.

Rikujtojmë se $Cech(S, r) \subseteq Rips(S, 2r)$ dhe $Rips(S, r) \subseteq Cech(S, r) \subseteq Cech(S, 2r)$. Pra filtrimet Rips dhe të Čehut kur krijohen me shkallë logaritmike, janë të $(\log 2)$ -ndërthurura,

$$\{Rips(S, e^r)\}_{r \geq 0} \text{ dhe } \{Cech(S, e^r)\}_{r \geq 0}$$

janë të $(\log 2)$ -ndërthurura.

Kapitulli 7

Stabiliteti

Deri tani kemi prezantuar homologjinë persistente në kontekstin diskret dhe mënyrën bazë të llogaritjes së saj. Tani do të kalojmë në pjesën teorike, ku do të njohim filtrimet e vazhdueshme dhe modulet e persiscencës. Këto koncepte janë kyçe për të kuptuar teoremën e stabilitetit, e cila tregon se homologjia persistente ndryshon në mënyrë të vazhdueshme kur ndryshon filtrimi.

Përmbajtja e këtij kapitulli bazohet në masë të konsiderueshme në librin e Ž.Virk [19] dhe T.Dey dhe Y.Wang [4].

7.1 Filtrimet e vazhdueshme

Rikujtojmë se një filtrim diskret i një kompleksi të simplekseve K është një varg nënkompleksesh të formës:

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m = K.$$

Një shembull i filtrimit është dhënë në figurën 7.1. Filtrimet diskrete përfaqësojnë një

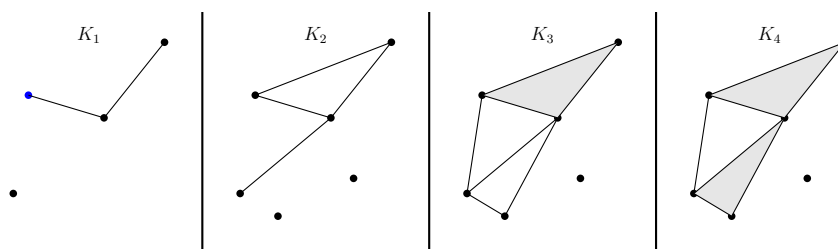


Figura 7.1: Filtrimi i komplekseve.

varg të fundme të komplekseve, ku secili nënkompleks përfshihet në tjetrin.

Megjithëse kjo qasje edhe pse është gjeometrikisht intuitive ekziston një mënyrë tjetër më e thjeshtë për ta përshkruar filtrimin. Në vend që të ruajmë të gjithë vargun e nënkomplekseve, mund ta shënojmë çdo simpleks $\sigma \in K$ me indeksin $f(\sigma)$ që tregon momentin kur ai shfaqet për herë të parë në filtrimin tonë.

Duke pasur këtë funksion shënimi, mund të rikonstruktojmë lehtësisht nënkompleksin përkatës për çdo hap të filtrimit $K_i = \{\sigma \in K \mid f(\sigma) \leq i\}$. Shih figurën 7.2, për një shembull.

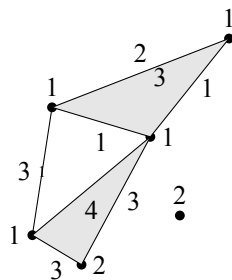


Figura 7.2: Shënimi i simpleksit nga filtrimi në figurën 5.4.

Nga kjo, mund të zgjerojmë konceptin e filtrimeve në dy drejtime, duke konsideruar filtrime të vazhdueshme të cilat përbëhen nga pafundësisht shumë nënkomplekse dhe duke përkufizuar filtrimet përmes një funksioni shënimi të përshtatshëm.

Përkufizim 7.1.1. *Një filtrim i vazhdueshëm i një kompleksi të simplekseve të fundme K është një koleksion i nënkomplekseve $\{K_r\}_{r \geq 0}$ të K të tillë që*

$$\forall r < q : K_r \subseteq K_q \subseteq K.$$

Do të kërkojmë edhe një kusht shtesë, për çdo simpleks $s \in K$, minimumi $\arg \min_r \{s \in K_r\}$ të ekzistojë, pra të ekzistojë shkallë më e vogël r në të cilën shfaqet σ . Një kusht ekuivalent është ky: për çdo r ekziston $r' > r$ i tillë që $K_r = K_{r'}$, pra nëse një simpleks mungon në shkallën r , ai mungon edhe në shkallë pak më të mëdha.

Nën këtë kusht, çdo filtrim i vazhdueshëm është një filtrim i nënniveleve i funksionit të vet shënues përkatës. Në veçanti, çdo filtrim i nënniveleve është një filtrim i vazhdueshëm dhe anasjelltas.

Përkufizim 7.1.2. *Le të jetë K një kompleks simpleksesh dhe $f : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ një funksion filtrimi, pra një funksion që i cakton çdo simpleksi të K një numër jonegativ në mënyrë që*

nëse $\sigma \subseteq \tau$, atëherë $f(\sigma) \leq f(\tau)$. Filtrimi i nënniveleve i induktuar nga f është një filtrim i vazhdueshëm, i përbërë nga familja e nënkomplekseve:

$$K_r = \{\sigma \in K \mid f(\sigma) \leq r\} \subseteq K, \quad \text{për çdo } r \geq 0.$$

Parametri r shpesh quhet shkallë, nocion që rrjedh nga filtrimet Rips dhe të Čechut ose nivel që rrjedh nga vetë funksioni i filtrimit.

Përkufizimi i grupeve të homologjisë persistente për filtrimet e vazhdueshme në thelb është i njëjtë me atë për filtrimet diskrete. Ndryshimi i vetëm qëndron në faktin se intervali i indeksimit është i vazhdueshëm, përkatësisht $0 \leq s \leq t$, gjë që në teori sjell pafund shumë grupe të homologjisë persistente.

Llogaritja përmes metodës së reduktimit të matricave nuk varet nga ky zgjerim i vazhdueshëm. Arsyeja është se kjo llogaritje bazohet vetëm në funksionin e filtrimit të përcaktuar mbi një numër të fundmë simpleksesh dhe nuk ka nevojë të përpunojë të gjitha komplekset e filtrimit, që do të ishin pafund në numër. Pra ne mund të llogarisim barkodin dhe diagramin e persistencës duke përdorur të njëjtën procedurë si për filtrimet diskrete, ashtu edhe për ato të vazhdueshme.

Tani do të shikojmë lidhjen mes filtrimeve diskrete dhe atyre të vazhdueshme:

1. Duke pasur një filtrim diskret, ekziston një zgjerim i natyrshëm i tij si filtrimi i nënniveleve i funksionit të shënimit.
2. Duke u nisur nga një filtrim i vazhdueshëm i nënniveleve $\{K_r\}_{r \geq 0}$ i përcaktuar përmes një funksioni filtrimi f , ekzistojnë dy mënyra për të ndërtuar një filtrim diskret:

- (a) Duke e ngushtuar filtrimin në një varg vlerash diskrete:

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_{\lfloor \max f \rfloor}.$$

Filtrimi i vazhdueshëm përkatës, siç përkufizohet nga pika 1, mund të jetë i ndryshëm nga familja $\{K_r\}_{r \geq 0}$. Ky zgjerim në një filtrim të vazhdueshëm nuk ruan informacionin e saktë mbi mënyrën se si ndryshon kompleksi ndërmjet niveleve të njëpasnjëshme të shkallës në filtrimin diskret.

- (b) Një mënyrë më efektive për të ndërtuar një filtrim diskret është që indeksi i të mos e shikojmë si shkallë, por si një indeks i një shkalle kritike të filtrimit të vazhdueshëm. Një shkallë r e një filtrimi të vazhdueshëm quhet kritike, nëse

të paktën një simpleks shfaqet në r . Formulisht përcaktojmë shkallët kritike $r_1 < r_2 < \dots < r_k$ si renditjen e vlerave që merr funksioni i filtrimit f (dmth. $\{r_1, r_2, \dots, r_k\} = \text{Im}(f)$) dhe përcaktojmë filtrimin diskret si:

$$K_i = \{\sigma \in K \mid f(\sigma) \leq r_i\}.$$

Ky filtrimi diskret përmban të gjithë informacionin rreth ndryshimeve në filtrimin e vazhdueshëm.

Filtrimi i Čehut mbi tri pika që formojnë një trekëndësh barabrinjës me gjatësi 1 në teori përfshin pafund shumë komplekse të simplekseve. Por ndryshimet reale në këtë filtrimi ndodhin vetëm në shkallët 0, $1/2$ dhe $1/\sqrt{3}$. Prandaj, filtrimi diskret përkatës (i ndërtuar sipas mënyrës së përshkruar në pikën 2(b)) përbëhet vetëm nga komplekset që formohen në këto tri shkallë, shih figurën 7.3.

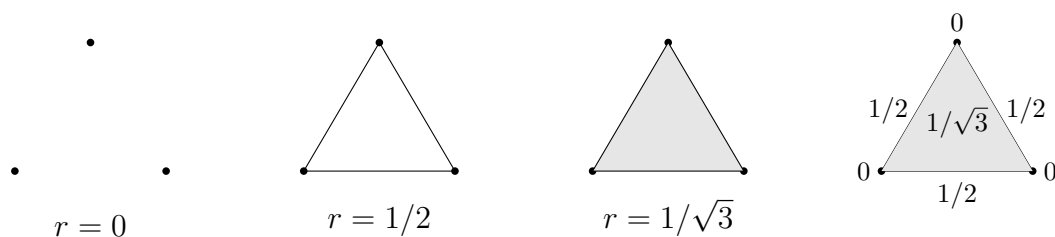


Figura 7.3: Filtrimi i Čehut mbi tri pika që formojnë një trekëndësh barabrinjës me gjatësi 1.

Përkufizim 7.1.3. *Le të jetë $\varepsilon > 0$. Dy filtrime të vazhdueshme $\{K_r\}_{r \geq 0}$ dhe $\{L_r\}_{r \geq 0}$ janë ε -ndërthurura nëse ekzistojnë pasqyrimet simplekse $\varphi_r : K_r \rightarrow L_{r+\varepsilon}$ dhe $\psi_r : L_r \rightarrow K_{r+\varepsilon}$ ashtu që $\varphi_{r+\varepsilon} \circ \psi_r : L_r \rightarrow L_{r+2\varepsilon}$ dhe $\psi_{r+\varepsilon} \circ \varphi_r : K_r \rightarrow K_{r+2\varepsilon}$ janë të barabarata me përfshirjet përkatëse.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & K_r & \longrightarrow & K_{r+\varepsilon} & \longrightarrow & K_{r+2\varepsilon} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & \psi_r & \varphi_r & & \psi_{r+\varepsilon} & \varphi_{r+\varepsilon} & \\
 \cdots & \longrightarrow & L_r & \longrightarrow & L_{r+\varepsilon} & \longrightarrow & L_{r+2\varepsilon} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Kemi treguar se filtrimet Rips dhe të Čehut me distancën e ndërthurjes janë të vazhdueshme (stabile) ndaj ndryshimeve të vogla në pikat bazë. Duke e përgjithësuar këtë rezultat, tani tregojmë se filtrimet e nënlevelit janë të vazhdueshme ndaj ndryshimeve të vogla në funksionin e filtrimit, duke matur ndryshimin me distancën maksimale.

Distanca maksimale ndërmjet dy funksioneve $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ të definuara mbi të gjitha simplekset e një kompleksi të fundmë K , përcaktohet si

$$\|f - g\|_\infty = \max_{\sigma \in K} |f(\sigma) - g(\sigma)|.$$

Pohim 7.1.4. *Le të jetë K një kompleks i simplekseve dhe $f, g : K \rightarrow [0, \infty)$ dy funksione filtrimi. Atëherë, filtrimet e nëniveleve që u përkasin funksioneve f dhe g janë $\|f - g\|_\infty$ -ndërthurura.*

Vërtetim. Për të përshtatur shënimin me diagramin më sipër për $\varepsilon = \|f - g\|_\infty$ përkufizojmë $K_r = \{\sigma \in K \mid f(\sigma) \leq r\} \subseteq K$ dhe $L_r = \{\sigma \in K \mid g(\sigma) \leq r\} \subseteq K$.

Pasqyrimet e ndërthurura φ dhe ψ i përkufizojmë të jenë identitetet mbi kulme. Këto pasqyrime janë të mirë të përcaktuara.

Vërtet, për çdo kulm $v \in K$, nëse $v \in K_r$ atëherë $v \in L_{r+\|f-g\|_\infty}$ sipas definicionit të distancës maksimale. Po ashtu nëse $v \in L_r$, atëherë $v \in K_{r+\|f-g\|_\infty}$.

Nga argumenti i njëjtë për simplekset pasi nëse një simpleks $\sigma \in K$ ndodhet në K_r atëherë ai është gjithashtu ndodhet në $L_{r+\|f-g\|_\infty}$, kemi se pasqyrimet φ dhe ψ janë pasqyrime simplekse.

7.2 Modulete e persistencës

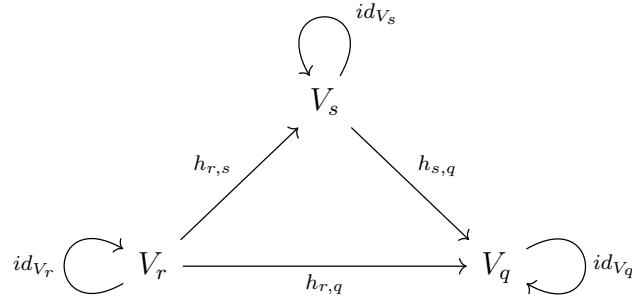
Homologjia persistente merret duke aplikuar homologjinë mbi një filtrim - një varg i renditur i komplekseve të simplekseve. Tani do të shqyrtojmë vetitë e objekteve algjebrike që rezultojnë nga ky proces, të quajtura module të persistencës. Këto module modelojnë evolucionin e hapësirave vektoriale në homologji, ashtu siç filtrimet modelojnë rritjen e komplekseve të simplekseve.

Për të gjithë kapitullin do të fiksojmë një fushë \mathbb{F} , e cila përdoret për koeficient e hapësirave vektoriale përfshirë grupet e homologjisë.

Përkufizim 7.2.1. *Një modul i persistencës është një koleksion i hapësirave vektoriale (me dimension të fundmë) $\{V_r\}_{r \geq 0}$ së bashku me pasqyrime lineare*

$$h_{r,q} : V_r \rightarrow V_q \quad \forall r \leq q$$

që plotësojnë kushtet $h_{r,q} = h_{r,s} \circ h_{s,q}$ dhe $h_{r,r} = id_{V_r}$ për të çdo $r \leq q \leq s$.



Shkalla $r \geq 0$ quhet regulare nëse ekziston një $\varepsilon > 0$ ashtu që pasqyrimet $h_{p,q}$ janë izomorfizma për çdo $p, q \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Shkalla r quhet kritike nëse nuk është regulare.

Modulet e persistencës përfaqësojnë strukturën algebrike themelore të homologjisë persistente për filtrimet e vazhdueshme.

Çdo modul i persistencës që do të shqyrtojmë do të ketë këto karakteristika:

1. Ekziston $R > 0$ e tillë që për çdo $R \leq r < q$, pasqyrimet $h_{r,q}$ janë izomorfizma, rrejdhimisht të gjitha funksionet h janë izomorfizma. Një veti analoge vlen edhe për filtrimet e vazhdueshme, pasi ato filtrojmë një kompleks të simplekseve të fundme. Në veçanti, nëse kemi një funksion filtrimi f , atëherë për çdo $r > \max |f|$ komplekset e nënlevele K_r mbeten të pandryshuara.
2. Për çdo $r > 0$ ekziston një $r' > r$ i tillë që për të gjitha $q \in [r, r')$, pasqyrimet $h_{r,q}$ janë izomorfizma.
3. Ekziston një numër i fundmë shkallësh kritike.

Nga vetitë 2 dhe 3 kemi se intervali $[0, \infty)$ mund të ndahet në një numër të fundmë intervalelesh të formës $[\lambda_1, \lambda_2)$ në të cilat të gjitha pasqyrimet h janë izomorfizma.

Përkufizim 7.2.2. Dy module të persistencës $\{V_r\}_{r \geq 0}$ dhe $\{W_r\}_{r \geq 0}$ quhen izomorfe nëse për çdo $r \geq 0$ ekzistojnë izomorfizmat $V_r \rightarrow W_r$ ashtu që për çdo varg të vlerave $0 \leq r_1 < r_2 < \dots$ diagrami në vazhdim është komutativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & V_{r_j} & \longrightarrow & V_{r_{j+1}} & \longrightarrow & V_{r_{j+2}} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\
 \dots & \longrightarrow & W_{r_j} & \longrightarrow & W_{r_{j+1}} & \longrightarrow & W_{r_{j+2}} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Përkufizim 7.2.3. Le të jenë $0 \leq p < q$. Një modul intervali $F_{p,q}$ që i korrespondon çiftit (p, q) është një modul i persistencës $\{V_r\}_{r \geq 0}$ që plotëson kushtet:

- i) $V_r = \mathbb{F}$ për $r \in [p, q)$ dhe $V_r = 0$ në të kundërtën.
 ii) Pasqyrimet $h_{s,s'}$ janë izomorfizma kur është e mundur.

Këto kushte mund t'i riformulojmë si:

- i) Për $p \leq s \leq s' < q$ pasqyrimi $h_{s,s'}$ është identiteti në \mathbb{F} .
 ii) Në të kundërtën $h_{s,s'}$ është pasqyrimi zero.

Distanca e ndërthurur është përkufizuar më parë për filtrimet, një përkufizim i ngjashëm vlen edhe për modulet e persistencës.

Përkufizim 7.2.4. Le të jetë $\delta > 0$. Modulet e persistencës $\{V_r\}_{r \geq 0}$ dhe $\{W_r\}_{r \geq 0}$ me pasqyrimet e tyre lineare përkatëse $h_{r,q}$ dhe $h'_{r,q}$ quhen ε -ndërthurura nëse ekzistojnë pasqyrimet lineare $\varphi_r : V_r \rightarrow W_{r+\varepsilon}$ dhe $\psi_r : W_r \rightarrow V_{r+\varepsilon}$ të tilla që pasqyrimet $\varphi_{r+\varepsilon} \circ \psi_r : W_r \rightarrow W_{r+2\varepsilon}$ dhe $\psi_{r+\varepsilon} \circ \varphi_r : V_r \rightarrow V_{r+2\varepsilon}$ janë të barabarta me pasqyrimet përkatëse të moduleve $h'_{r,r+2\varepsilon}$ dhe $h_{r,r+2\varepsilon}$.

Për dy module të persistencës, distanca e ndërthurur d_I përcaktohet si vlera minimale e të gjitha $\varepsilon > 0$ për të cilat ato janë ε -ndërlidhura.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & V_r & \longrightarrow & V_{r+\varepsilon} & \longrightarrow & V_{r+2\varepsilon} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & \psi_r & \varphi_r & & \psi_{r+\varepsilon} & \varphi_{r+\varepsilon} & \\
 & & & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \searrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & W_r & \longrightarrow & W_{r+\varepsilon} & \longrightarrow & W_{r+2\varepsilon} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Funktorialiteti i homologjisë nënkupton që filtrimet e ε -ndërthurura iduktojnë module të persistencës ε -ndërthurura. Për shembull nëse kemi dy filtrime të ndërthurura, që do të thotë që ka një ndryshim të vogël mes tyre, do të kemi gjithashtu modulet e persistencës që përfaqësojnë ndryshime të vogla mes këtyre dy filtrimeve.

Megjithatë ekziston një situatë ku modulet e persistencës mund të jenë të afërta pa qenë domosdoshmërisht të ndërthurura filtrimet e tyre. Kjo ndodh kur kemi të bëjmë me hapësira që janë “afër” njëra-tjetrës. Për shembull dy grupe pikash që përfaqësojnë të njëjtën formë gjeometrike, por me ndryshime të vogla në pozicionimin e pikave, mund të prodhojnë module të persistencës shumë të ngjashme, edhe pse filtrimet e tyre përkatëse mund të ndryshojnë.

Për të kuptuar më mirë këtë, së pari duhet të përkufizojmë se çfarë nënkuptojmë me “afërsi”.

Përkufizim 7.2.5. Le të jetë (X, d) një hapësirë metrike dhe $A, B \subset X$ nënbashkësi të fundme. Distanca e Hausdorff-it $d_H(A, B)$ përkufizohet si:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b), \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b) \right\}.$$

Në mënyrë intuitive distanca e Hausdorff-it mat sa larg janë A dhe B nga njëra-tjetra në rastin më të keq të mundshëm.

Pra ne kërkojmë që:

- Të gjejmë vlerën minimale r_A të tillë që rrethina $N(A, r_A) \supset B$, pra çdo pikë e B është brenda një distance r_A nga një pikë e A .
- Të gjejmë vlerën minimale r_B të tillë që rrethina $N(B, r_B) \supset A$.

Përfundojmë që $d_H(A, B) = \max\{r_A, r_B\}$. Vërejmë që për çdo $a \in A$ ekziston $b \in B$ ashtu që $d(a, b) \leq d_H(A, B)$ dhe anasjelltas.

Një shembull është dhënë në figurën 7.4, ku kemi një bashkësi të pikave me ngjyrë të zezë A dhe një bashkësi pikash me ngjyrë të kuqe B , ndërsa rrethinat e tyre përkatëse janë në mes dhe në fund të figurës. Pasi që $r_B > r_A$ kemi se $d_H(A, B) = r_B$.

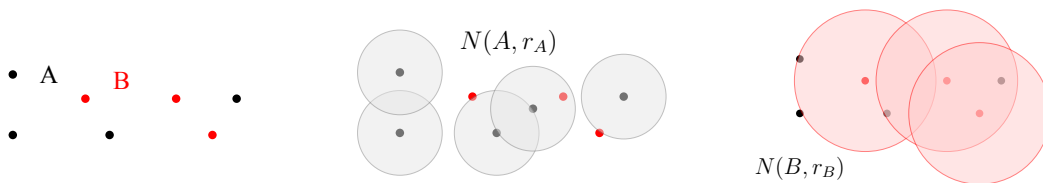


Figura 7.4: $d_H(A, B) = r_B > r_A$

Një nocion i ngjashëm me distancën e Hausdorff-it është distanca e Gromov-Hausdorff-it.

Përkufizim 7.2.6. Le të jenë A dhe B hapësira metrike të fundme. Distanca e Gromov-Hausdorff-it $d_{GH}(A, B)$ përkufizohet si:

$$d_{GH}(A, B) = \inf_{\mu, \nu} \{d_H(\mu(A), \nu(B))\},$$

ku infimumi merret mbi të gjitha zhytjet izometrike $\mu : A \rightarrow X$ dhe $\nu : B \rightarrow X$ në një hapësirë metrike X .

Pohim 7.2.7. Le të jenë A dhe B hapësira metrike të fundme dhe $\varepsilon = d_{GH}(A, B)$. Atëherë për çdo $q \in \{0, 1, \dots\}$ vlen:

1. $\{H_q(\text{Rips}(A, r))\}_{r \geq 0}$ dhe $\{H_q(\text{Rips}(B, r))\}_{r \geq 0}$ janë 2ε -ndërthurura.
2. $\{H_q(\text{Cech}(A, r))\}_{r \geq 0}$ dhe $\{H_q(\text{Cech}(B, r))\}_{r \geq 0}$ janë ε -ndërthurura.

Vërtetim. Do të japim vërtetimin vetëm për $q = 1$ dhe filtrimet Rips. Vërtetimi për rastet e tjera është analog, por më teknik.

Pa humbur nga përgjithësimi, mund të supozojmë që A dhe B janë nënbashkësi të një hapësire metrike X dhe $\varepsilon = d_H(A, B)$. Synimi ynë është të përkufizojmë pasqyrimet φ dhe ψ ashtu që diagrami i mëposhtëm të jetë komutativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_1(\text{Rips}(A, r)) & \longrightarrow & H_1(\text{Rips}(A, r + 2\varepsilon)) & \longrightarrow & H_1(\text{Rips}(A, r + 4\varepsilon)) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & \\
 & & & & \varphi_r & & \psi_r & & \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_1(\text{Rips}(B, r)) & \longrightarrow & H_1(\text{Rips}(B, r + 2\varepsilon)) & \longrightarrow & H_1(\text{Rips}(B, r + 4\varepsilon)) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Së pari përkufizojmë funksionet në kulmet e komplekseve Rips:

- Për çdo $a \in A$, zgjedhim një $b_a \in B$ të tillë që $d(a, b_a) \leq \varepsilon$ dhe përkufizojmë funksionin $\varphi_r(a) = b_a$ për çdo r .
- Për çdo $b \in B$, zgjedhim një $a_b \in A$ të tillë që $d(b, a_b) \leq \varepsilon$ dhe përkufizojmë funksionin $\psi_r(b) = a_b$ për çdo r .

Nga mënyra se si i kemi përkufizuar funksionet φ_r dhe ψ_r nuk përcaktojnë një ndërthurje mes filtrimeve Rips, pasi në rast të përgjithshëm $a_{b_a} \neq a$.

Le të jetë $a = \sum_i \{a_i, a_{i+1}\}$ një 1-cikël në $\text{Rips}(A, r)$, përcaktojmë $\varphi_r([a]) = [\sum_i \{b_{a_i}, b_{a_{i+1}}\}]$. Funksionet φ_r dhe ψ_r janë mirë të përcaktuara pasi:

- $\sum_i \{b_{a_i}, b_{a_{i+1}}\}$ është një cikël në $\text{Rips}(B, r + 2\varepsilon)$ pasi $d(a_i, a_{i+1}) \leq r$ implikon që $d(b_{a_i}, b_{a_{i+1}}) \leq r + 2\varepsilon$.
- Nëse vlen $[\sum_i \{a_i, a_{i+1}\}] = [\sum_i \{a'_i, a'_{i+1}\}]$ pra se $\sum_i \{a_i, a_{i+1}\} - \sum_i \{a'_i, a'_{i+1}\} = \partial \sum_j [x_j, y_j, z_j]$ atëherë kemi se vlen po ashtu

$$\varphi([\sum_i \{a_i, a_{i+1}\}]) = \varphi([\sum_i \{a'_i, a'_{i+1}\}])$$

pasi $\sum_i \{b_{a_i}, b_{a_{i+1}}\} - \sum_i \{b_{a'_i}, b_{a'_{i+1}}\} = \partial \sum_j [b_{x_j}, b_{y_j}, b_{z_j}]$ dhe $[b_{x_j}, b_{y_j}, b_{z_j}]$ janë trekëndësha në $\text{Rips}(B, r + 2\varepsilon)$.

Së fundi duhet të tregojmë që:

$$\left[\sum_i \{a_i, a_{i+1}\} \right] = \left[\sum_i \{a''_i, a''_{i+1}\} \right]$$

në $H_1(\text{Rips}(A, r + 4\varepsilon))$, ku $a''_i = a_{b_{a_i}}$. Vërejmë që $d(a_i, a''_i) \leq 2\varepsilon$ për çdo i . Ndryshimi $\sum_i \{a_i, a_{i+1}\} - \sum_i \{a''_i, a''_{i+1}\}$ është një kufi, siç tregohet nga 2-zinxhiri në figurën 7.5.

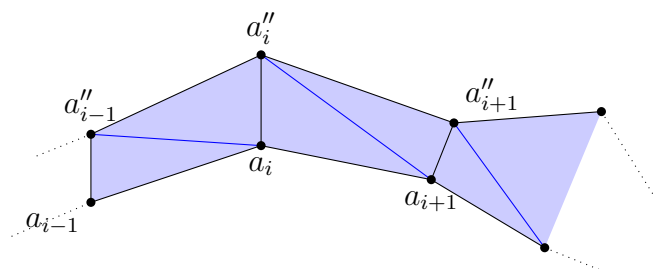


Figura 7.5: Çdo brinjë lidh kulmet që ndodhen në një distancë jo më të madhe se $r + 2\varepsilon$.

Vërejmë se $d_{GH}(A, B) \leq d_H(A, B)$ për nënbashkësi të fundme të një hapësire metrike X . Andaj pohimi paraprak vlen gjithashtu edhe për distancën e Hausdorff-it d_H . Por distanca Gromov-Hausdorff-it është zakonisht më e vështirë për t'u llogaritur, prandaj është më e përshtatshme të përdoret distanca e Hausdorff-it d_H .

7.3 Distanca bottleneck dhe teorema e stabilitetit

Teorema e stabilitetit është një nga rezultatet më të rëndësishme në homologjinë persistente. Nga e cila kemi se rezultatet e kësaj analize mbeten të qëndrueshme edhe kur të dhënat hyrëse pësojnë ndryshime të vogla. Me fjalë të tjera nëse kemi dy grupe të dhënash që janë përafërsisht të njëjta (si p.sh. e njëjta formë gjeometrike me pak zhurmë ose gabime) atëherë edhe diagramet e persistencës që fitojmë do të jenë të ngjashme.

Për të matur këtë ngjashmëri mes diagrameve të persistencës, përdorim distancën *bottleneck*. Kjo distancë na jep një mënyrë konkrete për të krahasuar se sa të ndryshme janë dy diagram. Ajo mat se sa duhet të zhvendosim pikat në një diagram që të përputhet plotësisht me diagramin tjetër.

Kjo veti e stabilitetit është mjaft e dobishme në praktikë, e sidomos kur punojmë me të dhëna reale që pothuajse gjithmonë përmbajnë zhurmë, gabime në matjeje ose pasaktësi të tjera. Nga kjo teoremë mund të jemi të sigurt që rezultatet tona do të jenë të besueshme edhe kur të dhënat tona nuk janë perfekte.

Supozojmë se $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ dhe $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ janë diagrame të persistencës, pra:

- çdo a_i dhe b_i është një pikë mbi diagonalen në kuadrantin e parë dhe
- çdo pikë mund të paraqitet disa herë në secilin diagram.

Për çdo pikë $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ le të shënojmë $\bar{v} = ((x + y)/2, (x + y)/2) \in \mathbb{R}^2$. \bar{v} përfaqëson pikën në diagonalen $D = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ që është më afër v në metrikën d_∞ (gjithashtu dhe në metrikën d_2).

Një përputhje parciale ndërmjet \mathcal{A} dhe \mathcal{B} është pasqyrimi bijektiv $\varphi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}'$, ku $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ dhe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$.

Sërish, një pikë mund të paraqitet në \mathcal{A}' ose \mathcal{B}' disa herë, por jo më shumë herë se sa paraqitet në \mathcal{A} ose \mathcal{B} përkatësisht.

Distanca e përputhjes φ përcaktohet si:

$$d_M(\varphi) = \max\{\max_{v \in \mathcal{A}'} d_\infty(v, \varphi(v)), \max_{v \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'} d_\infty(v, \bar{v}), \max_{v \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'} d_\infty(v, \bar{v})\}.$$

Rikujtojmë se distanca d_∞ ndërmjet dy pikave në rrafsh është:

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Le të shënojmë me $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ koleksionin e të gjitha përputhjeve parciale ndërmjet \mathcal{A} dhe \mathcal{B} .

Përkufizim 7.3.1. *Distanca bottleneck ndërmjet diagrameve të persistencës \mathcal{A} dhe \mathcal{B} është distanca minimale e përputhjes ndërmjet tyre, pra:*

$$d_B(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min_{\varphi \in \mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})} d_M(\varphi).$$

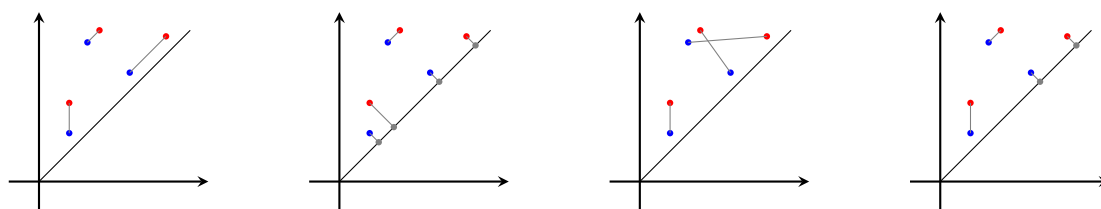


Figura 7.6: Shembuj të përputhjeve parciale ndërmjet diagrameve të persistencës së bashkësive të pikave me ngjyra të kuqe dhe kaltër.

Shembuj të përputhjeve parciale janë dhënë në figurën 7.6. Pikat që mbeten të papërputhura lidhen me pikën më të afërt në diagonale. Përputhja me distancën më të vogël

të përputhjes është e dyta nga e majta. Distanca $d_\infty(a, b)$ ndërmjet pikave a dhe b mund të interpretohet si gjysma e brinjëve të një katrori me qendër në a dhe me b në kufirin e tij. Nga të gjitha përputhjet, diagrami i mesëm është ai që jep katrorin maksimal më të vogël, shih figurën 7.7. Prandaj, distanca bottleneck d_B që rezulton, merret pikërisht nga ky diagram.

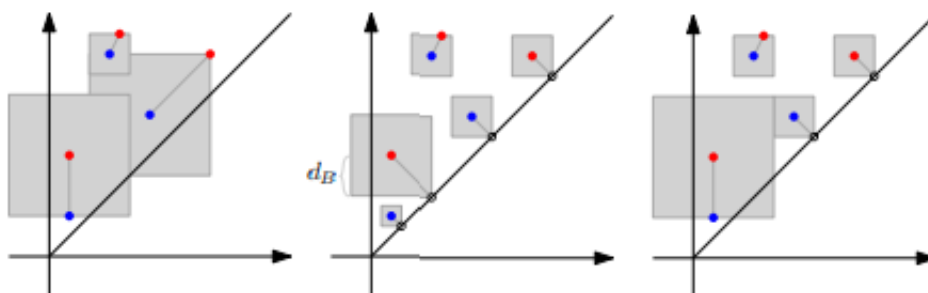


Figura 7.7: Distancat ndërmjet çifteve të përputhura paraqiten përmes katrorëve që lindin si rruzuj të metrikës d_∞ . Diagrami me katrorin maksimal më të vogël nga të gjitha përputhjet është ai i mesit.

Tani duhet të jetë e qartë pse është gjeometrikisht e përshtatshme që pikat në diagonale (në diagramin e persistencës) të konsiderohen si përfaqësuese të modulit trivial të persistencës.

Në mënyrë intuitive, një modul trivial i persistencës është ai ku nuk ka informacion domethënës, pra gjithçka që shfaqet “zhduket menjëherë” ose nuk krijon homologji domethënëse.

Pra, kur kemi një pikë në diagram në diagonale, ku koordinatat për lindjen dhe vdekjen janë të barabarta, p.sh. (b, b) , ajo përfaqëson një të dhënë që ka jetëgjatësi zero. Për këtë arsye, pavarësisht se cilën pikë në diagonale e zgjedhim, të gjitha përfaqësojnë të njëjtin modul trivial.

Një lëshim i këtij interpretimi është se çdo dy pika në diagonale përfaqësojnë të njëjtën gjë, pra nuk kanë ndonjë ndryshim thelbësor mes tyre. Në njëfarë mënyre, e gjithë diagonalja mund të shihet si një “pikë e vetme” ose një objekt i vetëm trivial që i bashkon të gjitha.

Shembull 7.3.2. Le të jetë \mathcal{A} diagrami i persistencës i paraqitur nga katër pika me ngjyrë të kaltër në figurën 7.8. Nëse një diagram tjetër i persistencës \mathcal{B} plotëson kushtin $d_B(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \varepsilon$, atëherë \mathcal{B} duhet të përmbajë pikat e mëposhtme:

- Për secilën pikë me ngjyrë të kaltër në \mathcal{A} , ekziston një pikë e caktuar me ngjyrë të kuqe në \mathcal{B} , brenda katrorit gri që përfaqëson rruzullin me rreze ε në distancën d_∞ . Në rastet kur disa nga këta katrorë priten mes vete, në zonën e përbashkët mund të ndodhen më shumë pika të kuqe nga \mathcal{B} . Megjithatë, në një përputhje optimale, secila pikë e kaltër lidhet me vetëm një nga këto pika të kuqe (edhe nëse ka më shumë se një brenda katrorit përkatës). Kjo siguron që çdo pikë e kaltër të përputhet me një pikë sa më afër, brenda distancës së lejuar ε . Në disa raste, përputhja optimale mund të përfshijë edhe një pikë në diagonale.
- Pikat e tjera në \mathcal{B} mund të jenë në shiritin gri përgjatë diagonales, i cili përfaqëson ε -rrethinën e diagramit të persistencës triviale. Ngjashëm katrorët që priten me këtë shirit mund të përmbajnë më shumë pika.

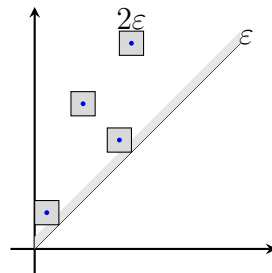


Figura 7.8: ε -rrethinat e diagramit që përbëhet nga pikat me ngjyrë të kaltër.

Tani do të japim një shpjegim që na jep distancën bottleneck duke përcaktuar distancën e ndërthurjes mes çifteve të moduleve të intervaleve.

Rasti 1: Distanca ndërmjet një moduli intervali dhe modulit të persistencës zero. Situata paraqitet në figurën 7.9. Për $0 \leq p < q$ le të diskutojmë ndërthurjen e modulit të intervalit $F_{p,q}$ (pjesa e theksuar e figurave) dhe modulit persistent triviale (pjesa gri në pjesën e poshtme).

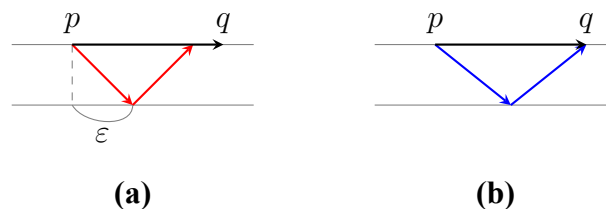


Figura 7.9: (a) Moduli i intervalit $F_{p,q}$ me modulën trivial nuk janë ε -ndërthurur nëse $\varepsilon < (q-p)/2$; (b) Moduli i intervalit $F_{p,q}$ me modulën trivial janë ε -ndërthurur nëse $\varepsilon \geq (q-p)/2$.

- Nëse parametri i ndërthurjes është $\varepsilon < (q - p)/2$, kompozimi i pasqyrimeve diagonale (shigjetat me ngjyrë të kuqe) është pasqyrimi trivial, pasi kalon përmes hapësirës triviale të vektorëve. Por duhet të ishte identitet mbi \mathbb{F} sipas kushteve të ndërthurjes. Pra kemi kontradiksion, kështu që parametri i ndërthurjes duhet të jetë të paktën $(q - p)/2$.
- Për $\varepsilon = (q - p)/2$ kompozimi i pasqyrimeve diagonale e rrit parametrin e shkallës me $q - p$ dhe çdo pasqyrim i $F_{p,q}$ është triviale. Pra ekziston një ε -ndërthurje që përmban pasqyrime triviale, siç tregohet në pjesën e dytë të figurës 7.9.

Andaj kemi se distanca e ndërthurjes është $\varepsilon = (q - p)/2$.

Rasti 2: Rasti i përgjithshëm. Nga rasti 1 konkludojmë se për $0 \leq p' < q'$ vlen: Nëse $F_{p,q}$ është ε -ndërthurur me $F_{p',q'}$ për $\varepsilon < (p - q)/2$ atëherë $[p', q'] \supseteq [p + \varepsilon, q - \varepsilon]$ dhe nga simetria $[p, q] \supset [p' + \varepsilon, q' - \varepsilon]$. Shih figurën 7.10. Këto kushte janë të mjaftueshme.

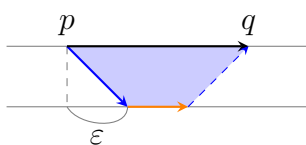


Figura 7.10: ε -ndërthurur nënkupton që pjesa portokalli është jotriviale, pasi pasqyrimet e ndërthurura janë në zonën blu.

Për vlerën minimale të ε për të cilën këto dy kushte vlejné marrim një ε -ndërthurje duke pasqyruar gjeneratorin e caktuar të $F_{p,q}$ në gjeneratorin e $F_{p',q'}$ sa herë që është e mundur, ndërsa pasqyrimet e tjera janë triviale, shih figurën 7.12. Nga figura 7.11 kemi që vlera e ε -së në këtë rast është $\varepsilon = \max\{|p - q|, |p' - q'|\}$.

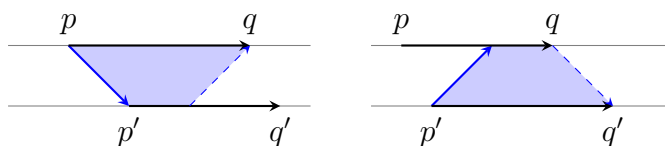


Figura 7.11: Kushti i figurës 7.10 përcakton dy forma. Distanca e ndërthurur është parametri ε më i madh që këto forma indukojnë.

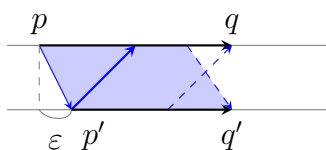


Figura 7.12: $\varepsilon = \max\{|p - q|, |p' - q'|\}$

Përfundojmë se $F_{p,q}$ dhe $F_{p',q'}$ janë $\max\{|p - q|, |p' - q'|\}$ -ndërthurura. Megjithatë nga rasti 1 kemi që $F_{p,q}$ dhe $F_{p',q'}$ janë gjithashtu $\max\{(p - q)/2, (p' - q')/2\}$ -ndërthurura nga pasqyrimeve triviale. Prandaj, distanca e ndërthurur mes $F_{p,q}$ dhe $F_{p',q'}$ është:

$$\min \left\{ \max\{|p - q|, |p' - q'|\}, \max \left\{ \frac{p - q}{2}, \frac{p' - q'}{2} \right\} \right\}.$$

Tani interpretojmë këtë distancë në kontekstin e diagrameve të persistencës që përfaqësojnë module intervalore. Së pari, vërejmë se:

$$\frac{p - q}{2} = d_{\infty} \left((p, q), \left(\frac{p + q}{2}, \frac{p + q}{2} \right) \right),$$

është distanca d_{∞} mes p_q dhe diagonales Δ .

Rasti 1: Distanca e ndërthurur mes $F_{p,q}$ dhe modulit të persistencës zero realizohet duke përputhur pikën (p, q) me pikën më të afërt në diagonale dhe duke llogaritur distancën d_{∞} , shih figurën 7.13 (a)

Rasti 2: Distanca mes $F_{p,q}$ dhe $F_{p',q'}$ është më e vogla nga të dyja rastet:

1. Ose $\max\{|p - q|, |p' - q'|\} = d_{\infty}((p, q), (p', q'))$, që është distanca d_{∞} mes pikave, shih figurën 7.13 (b).
2. Ose $\max\{(p - q)/2, (p' - q')/2\}$, ku secila pikë përputhet me pikën më të afërt në diagonale Δ dhe merret maksimumi d_{∞} , shih figurën 7.13 (c)

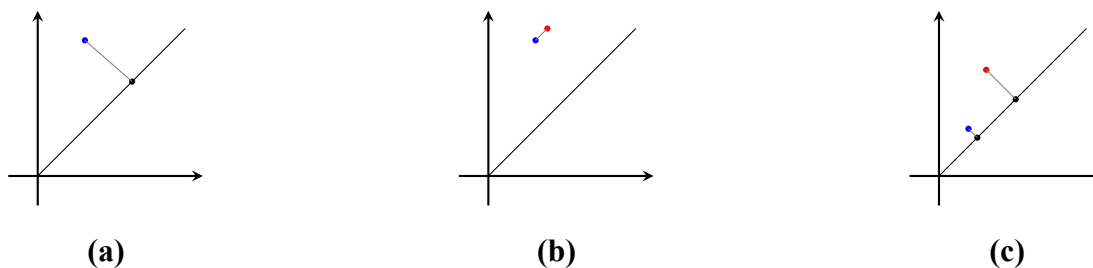


Figura 7.13: (a) Përputhja e pikës në diagonale Δ . (b) Përputhja e dy pikave. (c) Përputhja e dy pikave në Δ .

Teoremë 7.3.3 (Teorema e Izometrisë). *Distanca e ndërthurur mes moduleve të persistencës është e barabartë me distancën e bottleneck mes diagrameve përkatëse të moduleve të persistencës.*

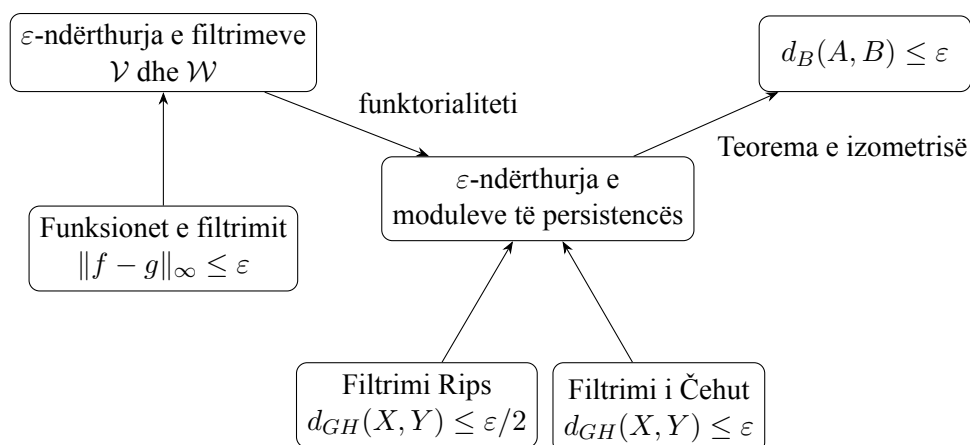
Tani do të japim një version të teoremës së stabilitetit, ky version kombinon disa versione të ndryshme të teoremës që mund të gjenden në literatura të ndryshme.

Teoremë 7.3.4 (Teorema e Stabilitetit). *Supozojmë se diagramet e persistencës \mathcal{A} dhe \mathcal{B} përfaqësojnë homologjinë persistente të filtrimeve \mathcal{V} dhe \mathcal{W} të fituara me një nga procedurat:*

1. *Si filtrime nëniveleve të funksioneve të filtrimit f dhe g që plotësojnë kushtin $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$, shih Pohimin 7.1.4.*
2. *Si filtrime Rips të hapësirave metrike X dhe Y që plotësojnë kushtin $d_{GH}(X, Y) \leq \varepsilon/2$, shih pikën 1 të Pohimit 7.2.7.*
3. *Si filtrime e Čehut të hapësirave metrike X dhe Y që plotësojnë kushtin $d_{GH}(X, Y) \leq \varepsilon$, shih pikën 2 të Pohimit 7.2.7.*

Atëherë, $d_B(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \varepsilon$.

Skema në vazhdim paraqet mënyrën e vërtetimit të teoremës së stabilitetit.



7.4 Interpretimi dhe aplikimi

Kur kemi një formë gjeometrike (p.sh. një shumëfaqësh të mbyllur) mund të ndërtojmë një point cloud që e përafrojn atë. Nëse bashkësia është mjaftueshëm e afërt me formën origjinale (në kuptimin e distancës së Gromov-Hausdorff-it) komplekset Rips ose të Čehut të ndërtuara nga kjo bashkësi pikash do të jenë në ekuivalencë homotopie me formën fillestare. Kjo do të thotë se homologjia persistente e këtyre komplekseve, veçanërisht në shkallë të vogla zbulon homologjinë e formës origjinale. Për më tepër diagramet e persistencës të bashkësisë së pikave që përafrojnë formën do të konvergjojnë drejt diagramit të persistencës të formës gjeometrike.

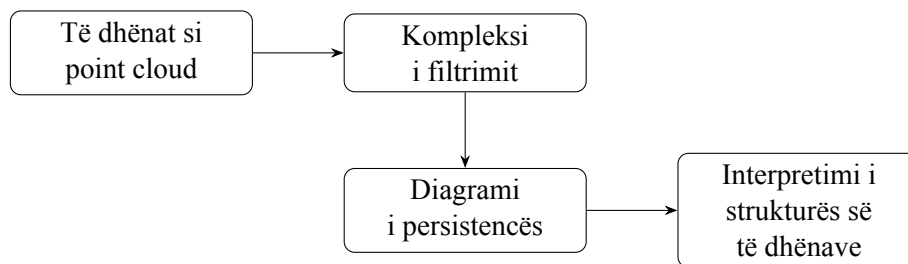


Figura 7.14: Rrjedha e analizës në homologjin persistente.

Diagrami në figurën 7.14 paraqet hapat e analizës përmes homologjisë persistente, një metodë që na ndihmon të kuptojmë strukturën topologjike të të dhënave. Fillimisht, të dhënat përfaqësohen si një bashkësi pikash, e cila më pas shndërrohet në një kompleks të filtruar që kap mënyrën se si pikat lidhen mes vete në shkallë të ndryshme. Këta komplekse analizohen për të ndjekur lindjen dhe zhdukjen e veçorive topologjike në filtrim dhe nga kjo analizë ndërtohet diagrami i persistencës. Ky diagram më pas interpretohet për të zbuluar struktura domethënëse në të dhëna. Kjo na mundëson të kuptojmë më mirë formën e të dhënave.

Veçoritë që rrjedhin nga diagrami i persistencës, si jetëgjatësia e komponenteve të lidhshmërisë, vrimave ose zgavrave, numrat persistentë të Betti-it mund të shndërrohen në vektorë numerikë. Këta vektorë përdoren më pas si karakteristika hyrëse në algoritmet e machine learning. Në këtë mënyrë, struktura topologjike e të dhënave përkthehet në forma që mund të përpunohen nga kompjuteri. Këto karakteristika ndimojnë në zgjidhjen e problemeve si klasifikimi, grupimi ose parashikimi, duke e bërë homologjinë persistente mjet kyç për ndërtimin e modeleve, sidomos kur forma dhe lidhjet në të dhëna kanë rëndësi thelbësore.

Në homologjinë persistente, pikat që ndodhen më larg diagonales kryesore në diagramin e persistencës përfaqësojnë veçori me persistencë më të lartë, pra veçori që mbijetojnë në një interval më të gjatë gjatë procesit të filtrimit. Këto veçori janë më të qëndrueshme dhe më pak të ndjeshme ndaj zhurmës apo ndryshimeve të vogla në të dhëna. Për këtë arsye, ato konsiderohen më të rëndësishme, pasi pasqyrojnë strukturat thelbësore të të dhënave. Identifikimi i këtyre veçorive na ndihmon të dallojmë më qartë modelin e vërtetë nga zhurma në të dhëna.

Shembull 7.4.1. Në figurën 7.15 janë paraqitur katër përafrime të një rrethi dhe për secilin prej tyre është ndërtuar diagrami i persistencës duke përdorur filtrimin Rips. Teorema e stabilitetit na siguron që këto diagrame do të jenë të përafërta me njëra-tjetrën, pavarësisht ndryshimeve të vogla në shpërndarjen e pikave.

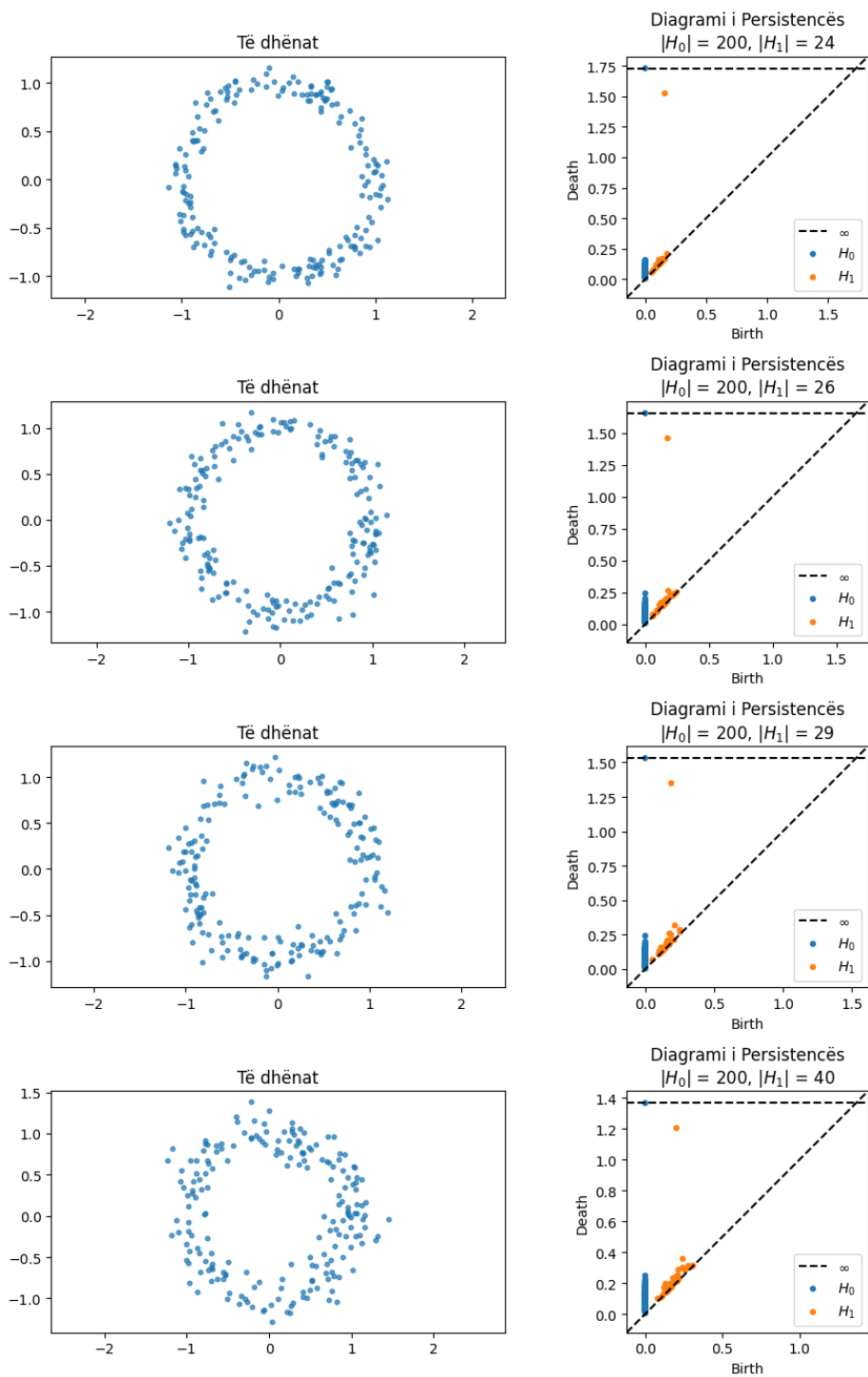


Figura 7.15: Katër përfaqime të rrethit dhe diagramet përkatëse të persistencës.

Nga diagramet e persistencës mund të vërejmë se:

- Në secilin diagram shfaqet një pikë e formës $(0, d)$ ku d ndryshon nga një rast në tjetrin

(1.75, 1.7, 1.5, 1.4). Kjo pikë përfaqëson shiritin $(0, \infty)$ pra komponentin kryesor të lidhshmërisë. Pra të gjitha pikat përfundimisht bashkohen në një komponent të vetëm.

- Veçoria topologjike më e rëndësishme është një pikë me persistente të lartë që vdes rreth vlerës 1.5, në të gjitha përafrimet. Kjo përfaqëson vrimën një-dimensionale të rrethit S^1 . Kjo pikë lind kur formohet një cikël dhe “vdes” kur ky cikël mbushet nga trekëndëshat në kompleksin Rips. Koha e shfaqjes së kësaj vrime varet nga shpërndarja e pikave dhe mënyra se si lidhen në kompleksin Rips. Kur pikat janë më të baraspeshuara, ky cikël shfaqet më herët. Koha e vdekjes (rreth 1.5) tregon shkallën në të cilën trekëndëshat e mbyllin plotësisht vrimën.
- Pikat e tjera në diagram kanë jetëgjatësi të shkurtër dhe vijnë si pasojë e diskretizimit të rrethit. Ato nuk kanë domethënie topologjike dhe janë si pasojë e zhurmave në të dhëna.

Shembull 7.4.2. Do të shqyrtojmë se si zhurma ndikon në strukturën e një torusi, duke përdorur diagramet e persistencës dhe distancën bottleneck.

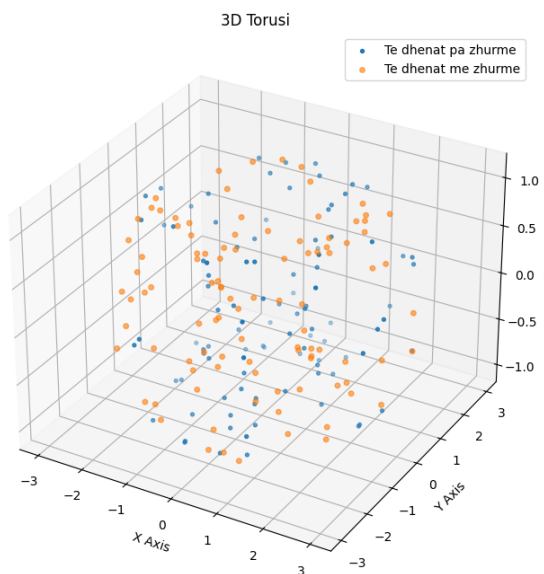


Figura 7.16: Bashkësia e pikave të torusit ideal dhe atij me zhurmë.

Gjenerojmë dy grupe të dhënash, një torus ideal dhe një tjetër me zhurmë. Bashkësia e pikave që është përdorur për këto përafrime të torusit është relativisht e vogël 100 pika. Torus ideal paraqitet si një grup pikash të rregullta në hapësirën tridimensionale, ndërsa ai me zhurmë përmban devijime të rastësishme. Në figurën 7.16 janë paraqitur këto bashkësi

pikash, ku me ngjyrë të kaltër është dhënë bashkësia e pikave të torusit ideal ndërsa me portokalli bashkësia e pikave të torusit me zhurmë.

Për të analizuar strukturën e tyre ndërtojmë komplekset e Ripsit, e më pas njehsojmë diagramet e persistencës për të dyja grupet, shih figurën 7.17. Shohim se distanca bottleneck mes dy diagrameve është 0.1776. Kjo vlerë është e ulët pra edhe pse zhurma ndikon ajo nuk e shkatërron plotësisht strukturën origjinale.

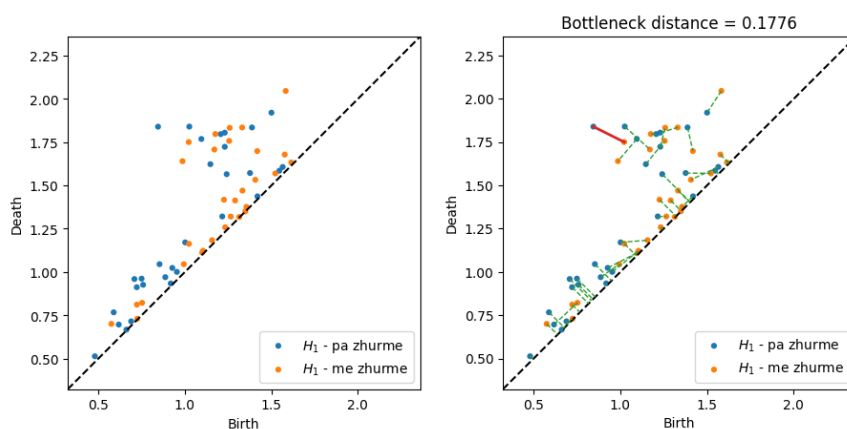


Figura 7.17: Diagrami i persistencës së dy bashkësive të pikave si dhe distanca bottleneck mes tyre.

Diagrami i persistencës për torusin ideal tregon një strukturë të qëndrueshme topologjike: një komponent të lidhshmërisë në H_0 që mbetet gjatë gjithë filtrimit, dy cikle në H_1 që korrespondojnë me dy përfituesit e torusit dhe një vrimë dy-dimensionale në H_2 që përfaqëson sipërfaqen e mbyllur të torusit.

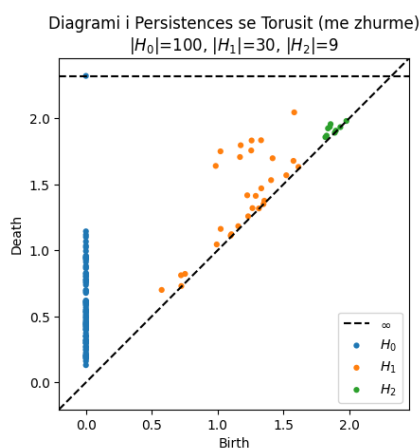


Figura 7.18: Diagrami i persistencës së bashkësisë së pikave me zhurmë të torusit.

Në rastin e torusit me zhurmë shfaqen më shumë komponentë të lidhshmërisë në H_0 dhe disa cikle shtesë në H_1 që lindin dhe zhduken shpejt për shkak të efekteve të zhurmës në të dhëna. Megjithatë, struktura kryesore e torusit mbetet e dallueshme. Shih figurën 7.18.

Zhurma mund të ndikojë në strukturën topologjike të të dhënave duke futur elemente të përkohshme por pa ndryshuar formën e të dhënave.

Kapitulli 8

Autizmi përmes homologjisë persistente

Autizmi është një çrregullim i zhvillimit të trurit që ndikon në mënyrën si një person komunikon, ndërvepron dhe e percepton botën përreth. Në vitet e fundit numri i rasteve me autizëm është rritur ndjeshëm dhe kjo ka ndikuar jo vetëm në jetën e individëve të prekur, por edhe në familjet e tyre. Andaj studimi i autizmit është bërë shumë i rëndësishëm.

Kur analizojmë të dhëna të trurit, është me rëndësi të zgjedhim një mënyrë për t'i përfaqësuar këto të dhëna në mënyrë që të ruajmë informacionin thelbësor, por edhe ta thjeshtojmë strukturën për analizë më të lehtë dhe të saktë. Analiza topologjike e të dhënave është një metodë e re matematikore që ndihmon në zbulimin e formës dhe strukturës së brendshme të të dhënave komplekse. Një nga teknikat më të rëndësishme në Analizën Topologjike të të Dhënave është homologjia persistente, e cila na ndihmon të shohim se si strukturat topologjike në të dhëna shfaqen dhe zhduken.

Kapitulli i fundit i kësaj teze do të fokusohet në përdorimin konkret të homologjisë persistente për të analizuar rrjetat e trurit tek individët me autizëm. Tradicionalisht, për analiza të tilla është përdorur teoria e grafeve, e cila tregon lidhjet mes pjesëve të ndryshme të trurit. Megjithatë kjo qasje ka kufizime kur duam të kuptojmë strukturat më të thella, si vrimat ose format e brendshme që mund të jenë të pranishme në të dhëna.

Homologjia persistente ofron përparësi të mëdha në këtë drejtim, ajo na lejon të zbulojmë struktura të fshehura në të dhëna dhe të identifikojmë dallime domethënëse mes rrjetave të trurit të personave me autizëm dhe atyre neurotipikë.

Homologjia persistente është një metodë që mundëson të bëjmë analizë të të dhënave në shkallë të ndryshme filtrimi, duke shfaqur dallimet mes strukturave të rëndësishme dhe zhurmave. Pasi analiza kryhet në disa nivele, mund të identifikojmë nëse disa lidhje apo forma shfaqen vetëm për një interval të shkurtër parametrash dhe zhduken shpejt, gjë që tregon se ato janë të ndikuara nga zhurma apo gabimet në të dhëna. Ndërsa strukturat që

vazhdojnë të ekzistojnë në një gamë më të gjerë filtrimi konsiderohen të qëndrueshme dhe përfaqësojnë tipare më domethënëse.

Këto karakteristika mund të përdoren për ndërtimin e algoritmeve të machine learning, të cilët mund të trajnohen për të identifikuar individët me autizëm, bazuar në strukturat topologjike të rrjetit të trurit. Kjo degë hap rrugë për zhvillimin e modeleve diagnostikuese, të cilat do të mund të ndihmojnë në zbulimin sa më të hershëm të autizmit.

Përmbajtja e këtij kapitulli bazohet në punimet e Ch.Giusti et al. [7], R.Craddock et al. [3], E.Centeno et al. [1] dhe Ch.Tralie et al. [18]. Për më tepër, janë përdorur burime të hapura të kodit në platformën GitHub, përfshirë punimet e N.Saul et al. [16] dhe B.Michel et al. [13].

8.1 Metodologjia

Përpara se të kalojmë në përshkrimin e mjeteve dhe mënyrës sesi ato janë përdorur, fillimisht paraqesim dy raste të thjeshta, të cilat ndihmojnë për të kuptuar më qartë pse këto teknika janë veçanërisht të përshtatshme për studimin e sistemeve neurale si rrjedhim dhe për shqyrtimin e çrregullimeve si autizmi.

Konsiderojmë një sistem shumë të thjeshtë me tri rajone të trurit, të cilat shfaqin korrelacion të fortë mes çdo dy rajoneve. Në një rast, ky korrelacion mund të vijë si pasojë e një procesi ciklik, ku aktivizimi kalon në mënyrë të përsëritur nga një rajon në tjetrin. Në një rast tjetër, aktivizimi ndodh njëkohësisht në të tria rajonet gjatë një detyre të përbashkët. Ndërsa në të dyja rastet do të regjistrohet e njëjta matricë korrelacioni, strukturat që qëndrojnë pas këtyre sjelljeve janë të ndryshme. Modelet tradicionale, të cilat përqendrohen në marrëdhëniet dyshe, nuk janë të mjaftueshme për të dalluar këtë ndryshim. Prandaj, komplekset e simplekseve janë më të përshtatshme për analizën e të dhënave neurale, pasi ato përfshijnë edhe bashkëveprimet mes grupeve më të mëdha se dy njësi dhe mundësojnë një përshkrim më të pasur të strukturës.

Kur kalojmë në një sistem me qindra njësi neurale, aktiviteti zakonisht matet në formën e një matrice korrelacioni. Praktika më e zakonshme është vendosja e një pragu: lidhjet me vlerë mbi prag përfshihen në analizë, ndërsa të tjerat hidhen poshtë. Kjo sjell kufizime, pasi zgjedhja e pragut është arbitrare dhe mund të fsheh fenomene të rëndësishme të rrjetit, veçanërisht në raste kur sistemet janë të ndërlikuara.

Një qasje më gjithëpërfshirëse është përdorimi i filtrimeve, të cilat përfshijnë të gjitha vlerat e mundshme të pragut dhe regjistrojnë ndryshimet strukturore që ndodhin gjatë këtij

procesi. Në këtë mënyrë, ruhet informacioni i plotë, ndërsa analizohet sesi ndryshon struktura në varësi të pragut. Më tej, këto filtrime përfaqësohen përmes funksioneve që matin karakteristika të ndryshme të strukturës në funksion të pragut, ku ndryshimet e papritura mund të shënojnë fenomene të rëndësishme në aktivitetin neural.

Homologjia persistente paraqet një analizë të saktë strukturës së rrjeteve neurale. Ajo ndjek mënyrën sesi formohen dhe zhduken komponentët e lidhshmërisë, ciklet dhe vrimat gjatë filtrimit, duke regjistruar për secilën strukturë momentin e shfaqjes dhe të zhdukjes së saj. Jetëgjatësia e këtyre elementeve topologjike interpretohet si një tregues i qëndrueshmërisë së saj në sistemin nervor. Kjo e bën homologjinë persistente veçanërisht të përshtatshme për të kapur veçoritë topologjike.

Do të analizojmë nëse ekzistojnë ndryshime statistikisht të rëndësishme në strukturat topologjike të të dhënave të trurit mes dy grupeve të individëve me çrregullim të spektrit të autizmit (grupi autik) dhe individëve neurotipikë (grupi kontroll). Të dhënat janë marrë nga baza e të dhënave ABIDE (Autism Brain Imaging Data Exchange) duke përdorur pipeline-in cpac dhe ndarjen funksionale të trurit `rois_cc200`.

Kjo ndarje funksionale e ndan trurin në 200 regjione interesi (Regions of Interest – ROI) të cilat përfaqësojnë zona të ndryshme të trurit të identifikuar në bazë të ngjashmërisë së aktivitetit të tyre funksional gjatë skanimit. Secila nga këto zona shoqërohet me një seri kohore që reflekton aktivitetin e saj gjatë skanimit të rezonancës magnetike f-MRI (functional Magnetic Resonance Imaging).

Fokushemi te regjionet e interesit të trurit, të cilat janë pjesë specifike të trurit që lidhen me funksione të rëndësishme, si komunikimi, ndjeshmëria sociale, përpunimi i informacionit dhe emocionet, funksione që shpesh ndryshojnë tek individët me autizëm. Pra përzgjedhja e ROI-ve është bërë pikërisht, sepse këto zona kanë më shumë gjasa të tregojnë ndryshime mes grupeve.

Për të siguruar cilësinë në të dhëna, janë përjashtuar individët që kanë pasur lëvizje të konsiderueshme të kokës gjatë skanimit, pasi lëvizjet mund të shtrembërojnë informacionin. Pas përpunimit dhe filtrimit të të dhënave, në analizë janë përfshirë gjithsej 97 individë të moshave 6 – 10 vjeç, prej të cilëve 42 janë autikë dhe 55 janë neurotipikë.

Për ndërtimin e rrjetit të trurit për secilin individ, nyjat përfaqësojnë regjionet e interesit, ndërsa lidhjet ndërmjet tyre përcaktohen përmes koeficienteve të korrelacionit mes serive kohore të këtyre regjioneve. Ky rrjet më pas shërben si baza e analizës tonë topologjike.

Edhe pse zakonisht komplekset Rips ndërtohen mbi një point cloud, në rastin tonë të dhënat fillestare janë rrjete që vijnë nga matricat e korrelacionit ndërmjet regjioneve të trurit. Këto nuk janë pika klasike në hapësirë, prandaj kemi përdorur një mënyrë tjetër

për të ndërtuar komplekset Rips.

Për ta bërë këtë, së pari kemi transformuar vlerat e korrelacionit në distanca përmes formulës:

$$d(i, j) = 1 - |\text{corr}(i, j)|.$$

Kjo do të thotë që dy regjione që kanë korrelacion të lartë (pra shfaqin modele të ngjashme të aktivitetit funksional gjatë skanimit) do të kenë distancë të vogël, dhe anasjelltas.

Pasi kemi ndërtuar matricën e distancave në këtë mënyrë, do ta përdorim atë si bazë për të ndërtuar komplekset Vietoris-Rips, të cilat na lejojnë të analizojmë strukturën topologjike të rrjetit me anë të homologjisë persistente.

Qëllimi ynë është të përdorim homologjinë persistente për të analizuar dhe krahasuar strukturën e rrjeteve nervore në këto zona të trurit, për të parë nëse ekzistojnë dallime të rëndësishme që mund të ndihmojnë në kuptimin më të thellë të autizmit.

8.2 Analiza topologjike

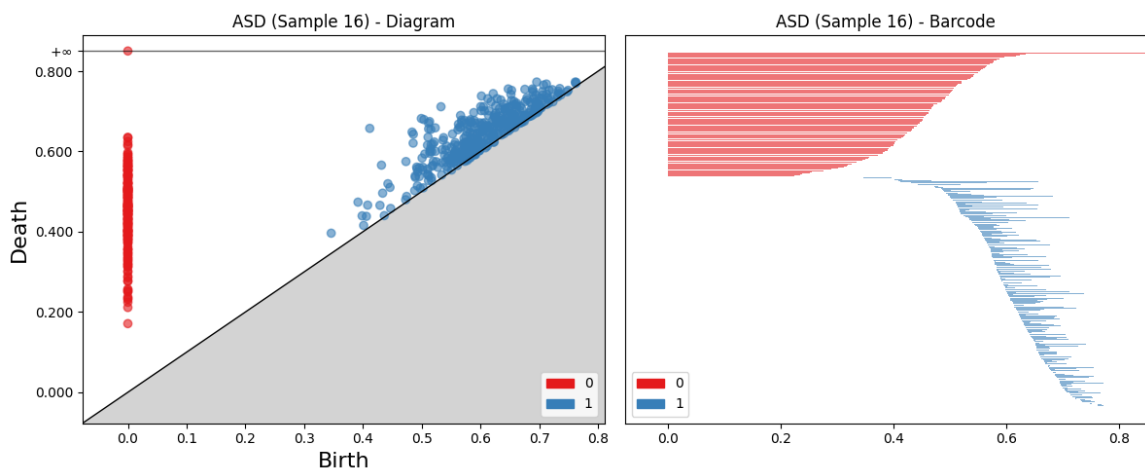
Për të krijuar një pasqyrë fillestare mbi të dhënat që do të analizohen, do të vizualizojmë diagramet e persistencës dhe barkodet për nga një individ të zgjedhur rastësisht nga secili grup: një nga grupi me çrregullim të spektrit autik dhe një nga grupi neurotipik. Këto vizualizime japin një ide të diagrameve të persistencës të dy grupeve dhe janë paraqitur në figurën 8.1.

Në dimensionin 0, kemi H_0 që përfaqëson numrin e komponentëve të lidhshmërisë, nuk vërejmë ndryshime të theksuara mes grupeve. Mirëpo në dimensionin H_1 , që pasqyron ekzistencën e cikleve, vërehen disa ndryshime vizuale në strukturën topologjike mes individëve të dyja grupeve.

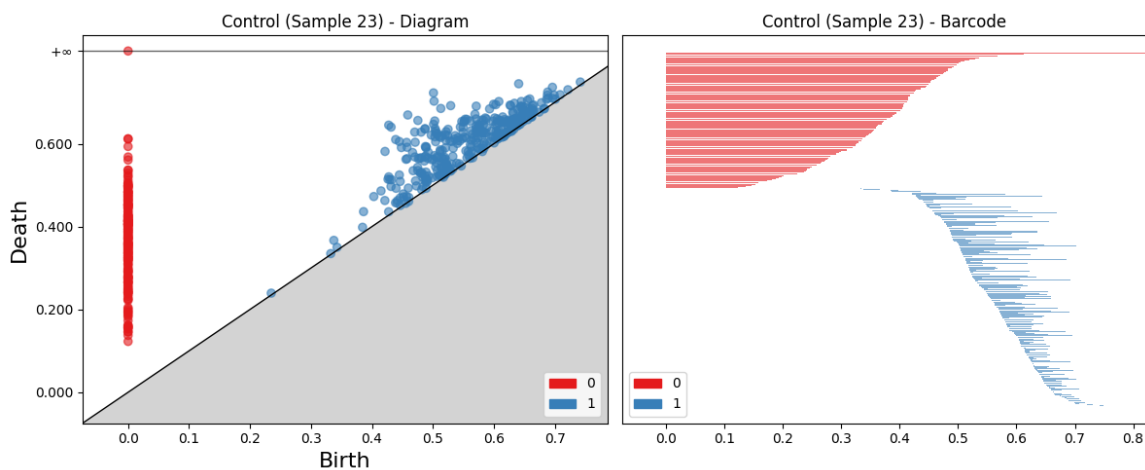
Për të krahasuar diagramet e persistencës për çdo individ, do të përdorim distancën Wasserstein, që mat largësinë mes dy diagrameve të persistencës duke llogaritur distancën minimale që duhet për të zhvendosur pikat e njërit diagram në tjetrin. Në rastin e distancës Wasserstein të rendit të parë $p = 1$, kemi se përkufizohet si:

$$W_1(D_1, D_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma(D_1, D_2)} \sum_{(x, y) \in \gamma} \|x - y\|_\infty$$

ku $\Gamma(D_1, D_2)$ është bashkësia e të gjitha përputhjeve të mundshme mes pikave të dy diagrameve, duke përfshirë edhe projeksionin në diagonale.



(a) Diagrami i persistencës dhe barkodi për një individ nga grupi autik.



(b) Diagrami i persistencës dhe barkodi për një individ nga grupi kontroll.

Figura 8.1: Vizualizimet e homologjisë persistente për një individ nga secili grup: (a) grupi autik dhe (b) grupi kontroll.

Distanca Wasserstein do të përdoret në vend të distancës bottleneck, pasi ajo merr në konsideratë të gjitha pikat në diagram, dhe jo vetëm pikën me ndryshimin maksimal. Kjo e bën atë më të ndjeshme ndaj ndryshimeve të shpërndara në strukturën e të dhënave, siç është rasti në të dhënat reale të trurit. Fillimisht, do të llogarisim distancat Wasserstein mes diagrameve të persistencës në këto tri raste: distancat brenda grupit autik (grupi autik – grupi autik), distancat brenda grupit kontroll (grupi kontroll – grupi kontroll) dhe distancat mes grupeve të ndryshme (grupi autik – grupi kontroll).

Më pas për të vlerësuar nëse distancat mes grupeve janë ndjeshëm më të mëdha sesa ato brenda secilit grup, do të përdorim testin Mann–Whitney U.

Hipotezat e testit janë:

H_0 : Nuk ka dallim domethënës në shpërndarjen e distancave; shpërndarja e distancave mes grupeve është e ngjashme me atë brenda grupeve.

H_1 : Distancat mes grupeve (grupi autik – grupi kontroll) janë dukshëm më të mëdha sesa ato brenda grupeve (grupi autik – grupi autik dhe grupi kontroll – grupi kontroll).

Në dimensionin zero kemi H_0 , dhe p - vlera është $p = 0.066683$, e cila nuk është statistikisht domethënëse, prandaj nuk kemi arsye për të refuzuar hipotezën zero në këtë rast. Në dimensionin një kemi H_1 , p - vlera është $p = 0.037475$, që sugjeron një dallim statistikisht të rëndësishëm në strukturat topologjike mes dy grupeve. Kjo nënkupton se ekziston një ndryshim në mënyrën se si formohen ciklet në rrjetet funksionale të trurit ndërmjet individëve me autizëm dhe atyre neurotipikë.

Pas rezultateve të analizës së distancave Wasserstein, ku u vërejt një dallim domethënës në dimensionin 1, kalojmë në një analizë më të detajuar duke shqyrtuar lakoret e Bett-it. Këto lakore tregojnë se si ndryshon numri i strukturave topologjike gjatë filtrimit, pra si ndryshon numri i komponentëve të lidhshmërisë dhe cikleve për shkallë të ndryshme të filtrimit. Zona nën këto lakore janë përdorur për të zbuluar strukturën gjeometrike të të dhënave neuronale, siç tregohet edhe në punimin e Ch.Giusti et al. [8].

Për të dyja grupet (grupi autik dhe grupi kontroll) në të dyja dimensionet (0 dhe 1), janë vizualizuar këto lakore për çdo individ, si dhe mesatarja për secilin grup. Në figurën 8.2 kemi se në nënfigurat (1) dhe (2) paraqiten lakoret e Bett-it për dimensionin 0 dhe 1, bashkë me mesataret e tyre për secilin grup. Nënfigurat (3) dhe (4) tregojnë lakoret për grupin kontroll dhe për grupin autik përkatësisht në dimensionin 0. Nënfigurat (5) dhe (6) tregojnë të njëjtën gjë për dimensionin 1. Grupi autike është paraqitur me ngjyrë të kuqe dhe grupi kontroll me ngjyrë të kaltër.

Për të kuptuar nëse ka dallime të rëndësishme ndërmjet grupeve në kontekstin e këtyre lakoreve, për secilin individ llogaritim sipërfaqen nën lakoren e Bett-it (AUC - Area Under the Curve). Për të krahasuar këto vlera ndërmjet dy grupeve, do të përdorim prapë testin Mann–Whitney U.

Hipotezat e testit janë:

H_0 : Sipërfaqet nën lakoret e Bett-it janë të ngjashme për grupin autik dhe për grupin kontroll, pra nuk ka dallim mes grupeve.

H_1 : Ekziston një dallim domethënës ndërmjet sipërfaqeve nën lakoret e Bett-it për grupin autik dhe për grupin kontroll.

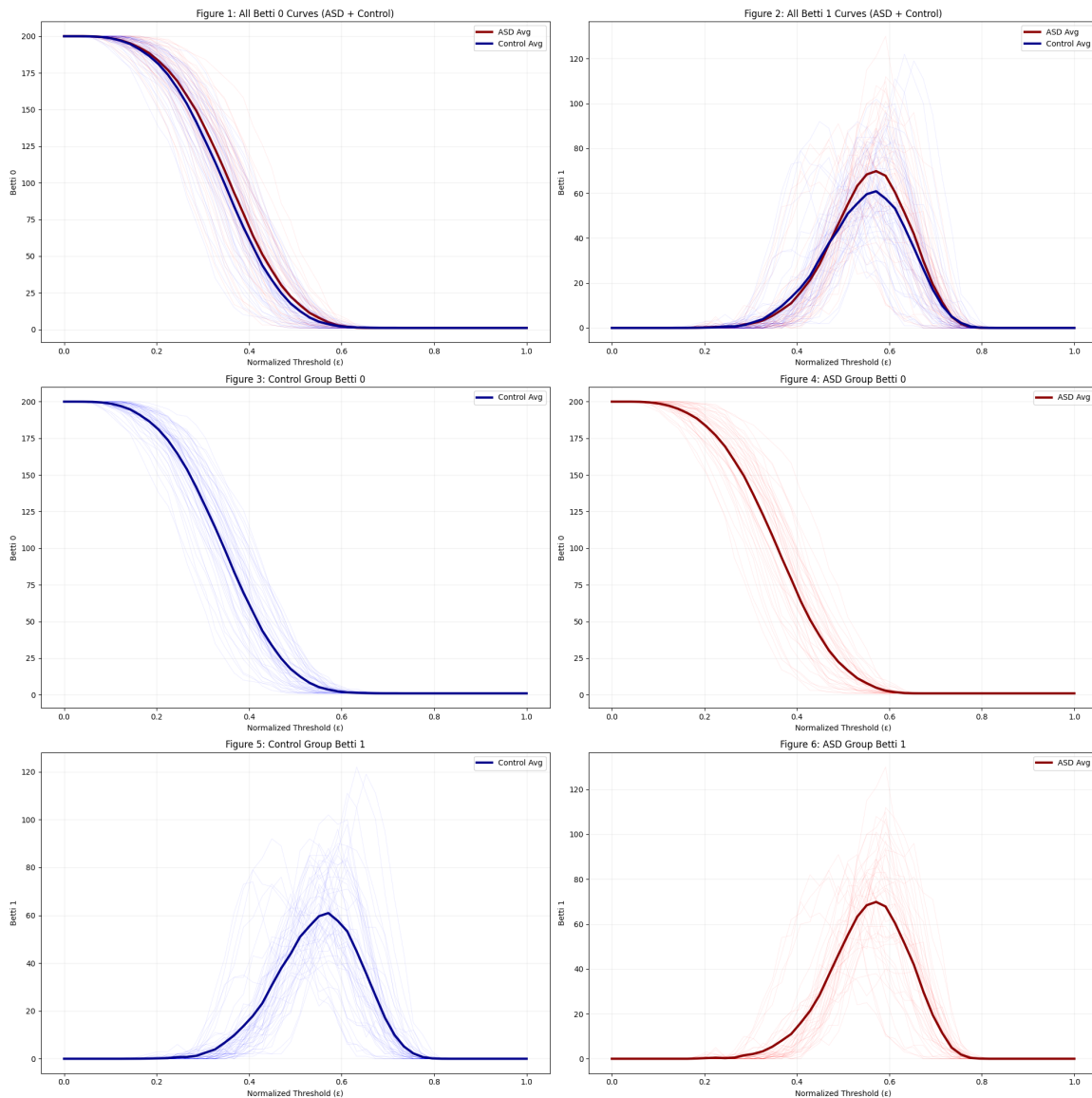


Figura 8.2: Lakoret e Bett-it për grupin kontroll dhe për grupin autik.

Rezultatet e testit tregojnë se për dimensionin 0 kemi $p = 0.137$, që nënkupton se nuk kemi dëshmi të mjaftueshme për të refuzuar hipotezën zero, ngjashëm si më parë për këtë dimension. Ndërsa për dimensionin 1 kemi që $p = 0.0025$, çka tregon se ka një ndryshim domethënës ndërmjet grupeve në këtë dimension.

Për të vlerësuar rëndësinë e këtij ndryshimi, llogaritet madhësia e efektit përmes Cohen's d , që është $d = 0.59$ dhe tregon një efekt të mesëm - të lartë.

Në figurën 8.3 është paraqitur shpërndarja e vlerave të sipërfaqeve nën lakoret e Bett-it të dimensionit 1 për të dyja grupet, autik dhe neurotipik.

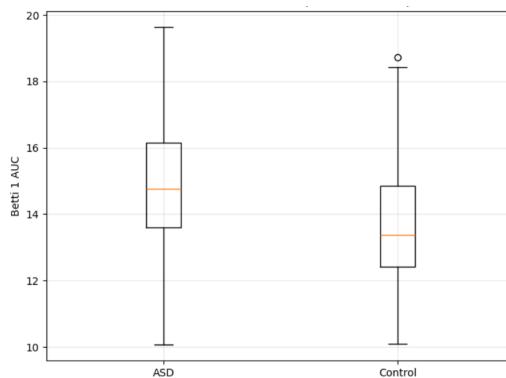


Figura 8.3: Sipërfaqet nën lakoret e Bett-it për të dyja grupet, të dhëna përmes *boxplot-it*.

Siç shihet ekziston një tendencë që grupi i individëve me autizëm të ketë vlera më të larta në përgjithësi, duke reflektuar një prani më të madhe të strukturave ciklike në rrjetin e tyre të trurit.

8.3 Përfundimi - Interpretimi i rezultatetve

Nga rezultatet e analizës topologjike të rrjetit të trurit, arrijmë në disa përfundime për ndryshimet mes individëve me autizëm dhe atyre neurotipikë:

- Dim 0 (Komponentët e lidhshmërisë) Dallimet mes grupeve janë të vogla, që tregon se struktura e lidhjeve të trurit është relativisht e ngjashme për të dyja grupet. Kjo do të thotë se numri i komponentëve të lidhshmërisë është i ngjashëm për individët me autizëm dhe ata neurotipikë. Ky rezultat sugjeron që nuk ka ndryshime të mëdha në shkëputjen e rajoneve të trurit, pra ndarja e disa rajoneve nga të tjerat është e ngjashme. Megjithatë kjo nuk tregon se mënyra se si këto rajone komunikojnë mes tyre është gjithashtu e njëjtë dhe mund të ketë dallime në bashkëveprimin e këtyre rajoneve.
- Dim 1 (Ciklet) Këtu dallimet janë më të dukshme. Truri i individëve me autizëm mund të formojë më shumë cikle (numrat e Bett-it më të mëdhenj) që tregon një lidhje më të “ndërlikuar” ndërmjet disa rajoneve të trurit. Kjo mund të jetë një mekanizëm kompensues, ku truri krijon rrugë alternative për të komunikuar mes dy rajoneve kur lidhja direkte është e dobët. Për shembull nëse dy rajone A dhe B, duhet të komunikojnë mes tyre direkt ($A \rightarrow B$) por lidhja direkte është e dobët, truri mund të krijojë një rrugë alternative C përmes një rajoni tjetër ($A \rightarrow C \rightarrow B$). Kjo mund të shkaktojë një komunikim të tepërt mes disa rajoneve, duke ndikuar një dinamikë tjetër

të trurit. Kjo strukturë më e ndërlikuar mund të lidhet me vështirësitë në integrimin e informacionit dhe simptomat si mbingarkesa sensoriale dhe komunikimi jooptimal.

Një nga aspektet më interesante në këtë pikë është mundësia për përdorimin e metodave matematikore dhe topologjike në zhvillimin e algoritmeve të inteligjencës artificiale për diagnostikimin e autizmit. Duke analizuar diagramet e persistencës dhe veçoritë topologjike të rrjetit të trurit, mund të krijohet një model që mund të dallojë individët me autizëm nga ata neurotipikë. Ky model mund të ofrojë një metodë më të shpejtë dhe objektive për diagnostikimin e çrregullimeve të spektrit të autizmit, duke mundësuar një diagnostikim më të shpejtë.

Metodat e homologjisë persistente mund të aplikohen në studimin e çrregullimeve të tjera të trurit si skizofrenia, alzheimeri e depresioni, ku ndryshimet në rrjetet e trurit janë të mundshme. Pra hap rrugë në zhvillimin e teknologjive të reja që mund të ndihmojnë në kuptimin e trurit dhe mund të kontribuojnë në krijimin e metodave diagnostikuese për një gamë të gjerë çrregullimesh.

Bibliografia

- [1] Eduarda Gervini Zampieri Centeno, Giulia Moreni, Chris Vriend, Linda Douw, and Fernando Antônio Nóbrega Santos. A hands-on tutorial on network and topological neuroscience. *Brain Structure and Function*, 227(3):741–762, 2022.
- [2] Chao Chen and Michael Kerber. Persistent homology computation with a twist. In *Proceedings 27th European workshop on computational geometry*, volume 11, pages 197–200, 2011.
- [3] Cameron Craddock, Yassine Benhajali, Carlton Chu, Francois Chouinard, Alan Evans, András Jakab, Budhachandra Singh Khundrakpam, John David Lewis, Qingyang Li, Michael Milham, et al. The neuro bureau preprocessing initiative: open sharing of preprocessed neuroimaging data and derivatives. *Frontiers in Neuroinformatics*, 7(27):5, 2013.
- [4] Tamal Krishna Dey and Yusu Wang. *Computational topology for data analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
- [5] Herbert Edelsbrunner and John L. Harer. *Computational topology. An introduction*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010.
- [6] Rubén Baeza Garcia. Simplicial homology and its applications, 2022. Bachelor thesis, Universidad de Zaragoza.
- [7] Chad Giusti, Robert Ghrist, and Danielle S Bassett. Two’s company, three (or more) is a simplex: Algebraic-topological tools for understanding higher-order structure in neural data. *Journal of computational neuroscience*, 41:1–14, 2016.
- [8] Chad Giusti, Eva Pastalkova, Carina Curto, and Vladimir Itskov. Clique topology reveals intrinsic geometric structure in neural correlations. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 112(44):13455–13460, 2015.

- [9] Marco Gualtieri. *Geometry and topology, 1300y: Teaching notes*, 2008. Graduate core course at the University of Toronto, 2008–2009.
- [10] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [11] Rune Haugseng. *Algebraic topology i lecture notes*, 2020. Course notes from NTNU, Fall semester 2020.
- [12] Marc Lackenby. *Topology & groups lecture notes*, 2024. Lecture notes for third and fourth year undergraduates, University of Oxford.
- [13] Bertrand Michel, Vincent Rouvreau, and Mathieu Carrière. *TDA Tutorial - GUDHI Project*. <https://github.com/GUDHI/TDA-tutorial>, 2020. Accessed: June 2025.
- [14] Perna Nadathur. *An introduction to homology*. *University of Chicago*, 2007.
- [15] Nina Otter, Mason A. Porter, Ulrike Tillmann, Peter Grindrod, and Heather A. Harrington. *A roadmap for the computation of persistent homology*. Preprint, arXiv:1506.08903 [math.AT] (2015), 2015.
- [16] Nathaniel Saul and Chris Tralie. *Scikit-tda: Topological data analysis for python*, 2019.
- [17] Patrick Schnider and Simon Weber. *Introduction to topological data analysis lecture notes fs 2024*, 2024.
- [18] Christopher Tralie, Nathaniel Saul, and Rann Bar-On. *Ripser. py: A lean persistent homology library for python*. *Journal of Open Source Software*, 3(29):925, 2018.
- [19] Žiga Virk. *Introduction to Persistent Homology*. Založba UL FRI, 2022.