Sistemet e rrënjëve dhe disa veti të tyre

Albin KURTAJ

Abstrakti i zgjeruar

Një nënbashkësi e hapësirës Euklidiane E, ku E është një hapësirë vektoriale mbi fushën e numrave realë $\mathbb{R}$, me dimension të fundmë, dhe e pajisur me një formë bilineare, simetrike dhe pozitive definite (α, β), quhet *sistem i rrënjëve* në E nëse plotësohen aksiomat në vijim:

(R1) Φ është e fundme, mbulon E, dhe nuk e përmban 0.

(R2) Nëse $\alpha \in \Phi$, të vetmit shumëfishe të α në Φ janë $\pm\alpha$.

(R3) Nëse $\alpha \in \Phi$, refleksioni σ_α lë Φ invariantë.

(R4) Nëse $\alpha, \beta \in \Phi$, atëherë $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$, ku me $\langle \beta, \alpha \rangle$ shënojmë numrin $2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

Le të jetë Φ një sistem i rrënjëve në E. Shënojmë me $\mathcal{W}$ nëngrupin e transformimeve regulare $GL(\mathrm{E})$ të përftuar nga reflektimet σ_α (ku $\alpha \in \Phi$). Nga (R3), $\mathcal{W}$ permuton bashkësinë Φ, e cila, sipas (R1), është e fundme dhe mbulon E. Kjo na lejon që të identifikojmë $\mathcal{W}$ me një nëngrup të grupit simetrik në Φ; në veçanti, W është e fundme. $\mathcal{W}$ quhet grupi Weyl i sistemit Φ.

Këto koncepte janë fundamentale në teorinë e Lie grupeve dhe Lie algjebrave, sidomos në teorinë e klasifikimit dhe reprezentimit të Lie algebrave semi të thjeshta. Ato kanë një natyrë të veçantë gjë që jep përshtypjen e gabuar që kanë një zbatim jo të gjerë, mirëpo ato gjejnë aplikim në fusha të matematikës që madje nuk kane lidhje të dukshme me teorinë Lie, siç është teoria e singularitit, por gjithashtu kanë rëndësi edhe në fusha më të afërta me veten.

Në punim fillimisht studiohen sistemet e rrënjëve, më pas kalohet në pjesën kryesore të punimit që është shkrepja e çipave, dhe kështu punimi do të përbëhet nga dy pjesë kryesore.

Pjesa e parë përbëhet nga 2 kapituj, ku në kapitullin e parë jepen përkufizime të sistemit të rrënjëve, ilustrohen në raste të ndryshme, definohen rrënjët e thjeshta dhe grupi i Weylit, bazat dhe gjithashtu punohen disa lema në lidhje me to, rrënjët e pazbërthyeshme e kuptime të tjera që ndihmojnë në kuptim sa më mirë të pjesës që vjen në vazhdim.

Kapitulli i dytë i pjesës së parë do të fokusohet në klasifikimin e rrënjëve të pazbërthyeshme, ku do punohen matrica e Kartanit, grafet Coxeter e diagramet Dinkin dhe duke vazhduar më pas me teoremën e klasifikimit ku jepen diagramet e mundshme Dinkin të Φ, varësisht nga rangu i sistemit të rrënjëve.

Shkrepja e çipave është lojë me një lojtar që ka si domenë të lojës grafet. Gjendjet e lojës janë konfigurime të çipave në kulmet e këtij grafi. Një kulm që ka të paktën aq çipa sa ka fqinjë thuhet të jetë jostabil. Ne mund të shkrepim cilindo nga kulmet jostabile që dërgon nga një çip nga ky kulm te secili nga fqinjët e tij dhe mund të vazhdojmë të shkrepim në këtë mënyrë derisa të arrijmë në një konfigurim ku të gjithë kulmet janë stabile. Një rezultat fundamental në këtë fushë është që ky proces është konfluent: ose vazhdojmë të shkrepim pafundësisht ose arrijmë një konfigurim stabil unik që nuk varet se nga cili kulm jostabil ne vendosim të shkrepim.

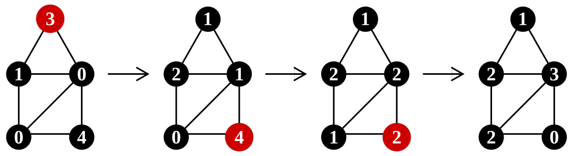

Figura 1: Shkrepja e çipave

Në figurën e mësipërme jepen 4 gjendje të lojës, ku shihet se 3 gjendjet e para janë jostabile, meqenëse kulmet me ngjyrë të kuqe kanë çipa të paktën aq sa kanë fqinjë dhe rrjedhimisht mund të shkrepin, ndërsa në konfigurimin e katërt vërejmë se asnjë kulm nuk ka çipa të paktën aq sa kanë fqinjë dhe arrihet një gjendje stabile e secilit kulm.

Ndërsa në një punim të matematikanëve Pavel Galashin, Sam Hopkins, Thomas Mcconville dhe Alexander Postnikov jepet një interpretim i këtij versioni të lojës në një sistem të rrënjëve si në vijim:

Nëse jepet një sistem i rrënjëve Φ me një zgjedhje të rrënjëve pozitive Φ^+, një shkrepje qendrore e çipave përbën zëvendësimin e peshës λ me shumën e λ dhe α për çdo rrënjë pozitive $\alpha \in \Phi^+$ që është ortogonale me λ. Në të tregohet se loja është konfluente nëse marrim mbetjen modulo grupin e Weylit, duke dhënë kështu një përgjithësim të lojës klasike të paetiketuar në një vijë në disa tipe tjera.

Përderisa në pjesën e parë jepet një hyrje dhe veti të rëndësishme në lidhje me sistemet e rrënjëve, në pjesën e dytë zhvillohet tema kryesore e këtij punimi që është shkrepja e çipave në sisteme të rrënjëve. Aty fillimisht shqyrtohet loja klasike me shkrepje të çipave në mënyrë që të merret një kuptim solid i kësaj loje ku së bashku me të jepen edhe kuptimet e lidhura ngushtë me vetë definimin e lojës, sikur është konfluenca e stabiliteti, lidhshmëria dhe pohime në lidhje me to.

Kapitulli i katërt thellohet në versionin e lojës së dhënë më lartë, e cila është përdorur në punimin e sipërpërmendur të matematikanëve Pavel Galashin, Sam Hopkins, Thomas Mcconville, dhe aty shqyrtohet saktësisht shkrepja e çipave në sisteme të rrënjëve. Aty do punohen temat si: 'Konfluenca e shkrepjes së çipave qendrore modulo grupi i Weylit', 'Shkrepja qendrore e pa etiketuar në diagrame të Dunkinit', 'Shtrirja e shkrepjes së çipave dhe lidhshmëria'.

Ndërsa pjesa kryesore e pjesës së dytë do jetë dhënia e një përgjigjeje sa më të plotë pyetjes:

Nëse jepet një sistem i rrënjëve Φ dhe një pikë $v \in E$, kur është Φ konfluent nga v?