Abstrakti

Teorema e Gromovit është një nga rezultatet më të rëndësishme të teorisë gjeometrike të grupeve.

Rritja polinomiale e grupeve të gjeneruara në mënyrë të fundme është objekti kryesor i studimit të Teoremës së Gromovit. Vërtetimet e Teoremës së Gromovit kanë mundësuar që kjo teoremë të gjejë zbatim edhe në disiplina të tjera të matematikës, si: gjeometri diferenciale, topologji, analizë funksionale etj. Gjithashtu, vërtetimet e kësaj teoreme krijuan ndërlidhje interesante të disiplinave matematikore që ofruan një qasje inovative dhe interesante për matematikanët.

Mikhael Gromov, një matematikan i njohur rus-francez, e formuloi këtë teoremë në vitet 1980-1981. Përmes kësaj teoreme, Mikhael Gromov shpalosi lidhjen në mes të grupeve me rritje polinomiale me grupet nilpotente. Përpos Gromovit, shumë matematikanë të tjerë, si: Terence Tao(2010), Yves Benoist dhe Jean-François Quint(2012-2014), Bruce Kleiner (2010) e vërtetuan këtë teoremë në forma të ndryshme, duke mundësuar kështu zgjerimin e zbatueshmërisë së teoremës.

Teza e masterit zhvillohet përmes katër kapitujve si në vijim:

Në kapitullin e parë (I) trajtohen grupet dhe grafet. Këtu grumbullohen dhe sistematizohen përkufizimet dhe rezultatet e nevojshme nga teoria e grupeve dhe e grafeve. Rikujtojmë se komutator i elementeve a, b quhet elementi $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Nëngrup komutator i grupit G quhet grupi $[G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$. Më tutje, shqyrtohen nëngrupet normale, si dhe seritë qendrore të grupeve. Seri e poshtme qendrore e grupit G quhet seria e vetme zvogëluese $(G_i)_{i\geq 1}$ e grupit G, ku $G_1 = G$ dhe $G_{i+1} = [G, G_i\ ] = \langle [a, b] \mid a \in G,\ b \in G_i \rangle$ për çdo $i > 1$.

Në këtë kapitull, me theks të veçantë, trajtohen grupet nilpotente. Grupi G quhet grup nilpotent, nëse seria e poshtme qendrore e tij është e fundme. Pas grupeve nilpotente përkufizohen edhe grafet, si dhe shqyrtohen vetitë e tyre, të cilat do të na nevojiten për ndërtimin e mjeteve të përshtatshme për vërtetimin e teoremës.

Në kapitullin e dytë (II) përkufizohen grafet e Cayley-t dhe përkufizohet distanca në to. Graf i Cayley-t për grupin G do të quhet grafi $\Gamma = (V, E)$ ku $V = G$, si dhe $E = \{(g, gs) | g \in G,\ s \in S\}$. Ndërësa, distancë e elementeve g dhe h do të quhet gjatësia e rrugës më të shkurtër që i lidh ato dy elemente. Pas distancës, njoftohemi me konceptin e normës së fjalëve. Për çdo element $g \in G$, norma e fjalëve e elemetit g që shënohet me $\|g\|_S$ quhet numri më i vogël $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, për të cilin ekziston përfaqësimi $g = s_1 s_2 \cdots s_n$, ku $s_i \in S$. Ndryshe,

$$\|g\|_S = \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} | g = g = s_1 s_2 \cdots s_n, \text{ku } s_i \in S\}.$$

Më tutje, trajtohen shembuj konkretë të njehsimit të normës së fjalëve, ku përgatitet tereni për shqyrtimin e problemit kombinatorik të numërimit të elementeve në rruzujt njësi, $B_S(n) = \{g \in G | \|g\|_S \leq n\}$. Ky problem kombinatorik mundëson që të krijojmë idetë fillestare të konceptit të rritjes së grupeve. Funksion i rritjes për grupin G në lidhje me bashkësinë gjeneruese S quhet funksioni $\gamma_{G,S} \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ i dhënë me barazimin, $\gamma_{G,S}(n) = |B_S(n)|$, ku $B_S(n)$ është rruzulli me qendër në elementin njësi. Ky funksion i rritjes klasifikohet dhe më pas shqyrtohen vetitë e rritjes së grupeve, ku me theks të veçantë ndalemi te grupet me rritje polinomiale. Për grupin G themi se ka rritje polinomiale, nëse $\gamma_G(n) \approx n^d$. Nëse $\gamma_G(n) \preccurlyeq n^d$, atëherë themi se grupi G ka rritje nën-polinomiale. Ky kapitull, gjithashtu, plotësohet edhe me shembuj konkretë.

Në fund të këtij kapitulli formulohet Teorema e Gromovit:

Teorema e Gromovit: Le të jetë G grup i gjeneruar në mënyrë të fundme. Nëse grupi G ka rritje polinomiale, atëherë ai është virtualisht nilpotent.

Në kapitullin e tretë (III) jepen disa kuptime dhe rezultate nga analiza funksionale, kuptime këto të cilat ndihmojnë në vërtetimin e teoremës. Fillimisht, përkufizohet hapësira e Hilbertit në lidhje me grupin G, $l^2(G) = \left\{f \colon G \longrightarrow \mathbb{C} \,\middle|\, \sum_{g \in G} |f(g)|^2 < \infty\right\}$. Më pas, për elementin e bashkësisë gjeneruese simetrike $s \in S$, përkufizohet funksioni $(L_s f)(g) = f(s^{-1} g)$, për çdo $g \in G$, të cilin e quajmë zhvendosje e majtë. Gjithashtu, trajtohen vetitë e zhvendosjes së majtë, si dhe përkufizohet operatori Laplas. Operator i Laplasit në lidhje me bashkësinë S quhet operatori $\Delta_S \colon l^2(G) \to l^2(G)$ i dhënë me barazimin:

$$\Delta_S = I - M_S$$

Me fjalë të tjera, për çdo $f \in l^2(G)$ dhe për çdo $g \in G$ vlen:

$$(\Delta_S f)(g) = f(g) - \frac{1}{|S|}\sum_{s \in S} f(gs).$$

Ky operator është jashtëzakonisht i rëndësishëm, sepse përmes tij përkufizohet një klasë tejet e rëndësishme e funksioneve, funksionet harmonike. Funksionin $f \in l^2(G)$ do ta quajmë funksion harmonik në lidhje me bashkësinë gjeneruese simetrike S, nëse $\Delta_S(f) = 0$.

Tutje, do të përkufizohet hapësira e funksioneve Lip-harmonike me rritje polinomiale, me rend jo më të madh se k,

$$\mathcal{H}_k(G) = \{f: G \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \ harmonik, Lipschitz \ dhe \ \exists C > 0 \ \therefore \ |f(g)| \leq C(1 + \|g\|_S)^k \ (\forall g \in G)\}.$$

ku funksionet Lipshcitz do të quhen ato funksione, për të cilat ekziston konstanta reale $C \geq 0$ ashtu që:

$$|f(g) - f(gs)| \leq C.$$

Ky kapitull përmbyllet me teoremën e Kleiner-it, me vërtetimin se:

$$\dim \mathcal{H}_k(G) \leq C(d)k^{d-1}.$$

Në kapitullin e katërt (IV) bëhet vërtetimi i teoremës kryesore, Teoremës së Gromovit. Paraprakisht, trajtohet një historik i vërtetimeve të kësaj teoreme, si dhe bëhet një lidhje me kapitujt paraprakë. Teorema do të vërtetohet përmes këtyre hapave:

1. Përkufizojmë homomorfizmin e zhvendosjes së majtë, $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(H_k(G))$, ashtu që $\rho(x) = L_x$.

2. Tregojmë se ker ρ është nëngrup nilpotent i grupit G.

3. Tregojmë se ker ρ është nëngrup me indeks të fundmë në G.

Në fund të kapitullit të katërt, jepen disa shembuj të zbatimit të Teoremës së Gromovit, si dhe formulohen disa pyetje, që mund të trajtohen si raste studimore të mëtutjeshme.