



UNIVERSITETI I PRISHTINËS  
"HASAN PRISHTINA"  
FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE NATYRORE

Rr. Eqrem Çabej, 10000 Prishtinë, Republika e Kosovës  
Tel: +381-38-249-873 • E-mail: [fshmn@uni-pr.edu](mailto:fshmn@uni-pr.edu) • [www.uni-pr.edu](http://www.uni-pr.edu)

FSHMN

Ref. nr. 2153

Prishtinë, Dt. 02/07/2025

RAPORT I VLERËSIMIT TË DORËSHKRIMIT TË PUNIMIT TË DIPLOMËS  
MASTER

FAKULTETI	FSHMN
Departamenti/ Programi	Matematikë
Projektpropozimi	Teorema e Gromovit
Kandidati	Bregan Isufi
Mentori	Dr. Qëndrim Gashi
Aprovimi i projekt propozimit në	Datë: 27.11.2024
Këshillin e Fakultetit	Vendimi nr.:5737

**Vlerësimi i dorëshkrimit**

Dorëshkrimi i paraqitur për vlerësim i kushtohet një prej rezultateve themelore në teorinë gjeometrike të grupeve, Teoremës së Gromovit mbi grupet me rritje polinomiale, shkurt *Teorema e Gromovit*. Rezultati i Gromovit e bën një lidhje të jashtëzakonshme në klasën e grupeve të gjeneruara në mënyrë të fundme, ndërmjet vetive gjeometrike të rritjes polinomiale të një grupi dhe vetive algjebrike të të qenit grup virtualisht nilpotent, d.m.th. grup me nëngrup nilpotent me indeks të fundmë. Metodrat dhe lidhjet që i ka bërë Gromov kanë pasur dhe vazhdojnë të kenë impakt dhe janë pjesë aktive e kërkimeve edhe sot, mbi 40 vite pas vërtetimit fillestar të atij rezultati.

Punimi master i ka 76 faqe dhe literaturën me 22 njësi bibliografike. Tema shtjellohet në katër kapituj të cilët do t'i përshkruajmë në vijim.

**Kapitulli i parë** i shqyrton grupet dhe grafet. Rikujtohen nocione të ndryshme të teorisë së grupeve dhe shqyrtohen veti të tyre. Në veçanti shqyrtohen nëngrupi normal, faktor-grupi,

nëngrupi komutues, etj. Më tej trajtohen seritë qendrore dhe grupet nilpotente si dhe grupet virtualisht nilpotente. Kapitulli mbaron me nocionet e grafit dhe shkallëve të kulmeve.

**Kapitulli i dytë** e studion “rritjen” e grupeve. Së pari ndërtohen grafet e Kejlit (Cayley) që i shoqërohen grupeve. Duke e fiksuar një bashkësi përfutuesish (gjeneratorësh), më pas përkufizohet distanca ndërmjet elementeve të grupit, norma si dhe rruzulli me qendër në elementin njësi dhe me rreze të caktuar. Këto koncepte e mundësojnë dhënien e nocionit të funksionit të rritjes për një grup, i cili, deri në një nocion adekuat ekuivalence, nuk varet nga zgjedhja e bashkësisë së fundme të gjeneratorëve. Shqyrtohen veti të funksionit të rritjes dhe posaçërisht rastet e grupeve me rritje polinomiale, do të thotë ku funksioni i tyre i rritjes është polinomial. Kapitulli përfundon me formulimin e (një versioni të) rezulttit kryesor, Teoremës së Gromovit: çdo grup i gjeneruar në mënyrë të fundme dhe i cili ka rritje polinomiale është virtualisht nilpotent.

**Kapitulli i tretë** përmban një shqyrtim të nocioneve dhe rezultateve nga analiza funksionale, të cilat më pas përdoren për vërtetimit të Teoremës së Gromovit. Studiohet hapësira

$$l^2(G) = \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{g \in G} |f(g)|^2 < \infty\}$$

si dhe zhvendosja e majtë në lidhje me një element të fiksuar të gjeneratorëve. Trajtohen vetitë e zhvendosjes së majtë si dhe bëhet përkufizimi i operatorit të Laplasit. Përmes këtij të fundit përkufizohet klasa e funksioneve harmonike. Pastaj jepet hapësira e funksioneve Lip-harmonike me rritje polinomiale me rend jo më të madh se një numër i paracaktuar dhe në fund të kapitullit vërtetohet se ajo hapësira është me dimension të fundmë dhe për më shumë jepet një kufi i sipërm për dimensionin e saj.

**Kapitulli i katërt** i kushtohet vërtetimit të Teoremës së Gromovit. Paraprakisht trajtohet një historik i vërtetimeve të kësaj teoreme si dhe bëhet një lidhje me kapitujt paraprak. Teorema vërtetohet duke i përdorur funksionet Lip-harmonike, dimensionin e hapësirës së funksioneve Lip-harmonike, operatorin e zhvendosjes së majtë si dhe veti të bërthamës së atij operatori. Në fund të kapitullit të katërt jepen disa shembuj të zbatimit të Teoremës së Gromovit si dhe formulohen disa pyetje që mund të trajtohen si raste studimore të mëtutjeshme.

Ky dorëshkrim e paraqet një kontribut të dobishëm dhe të çmueshëm për komunitetin tonë shkencor, në prezantimin dhe përhapjen e ideve të teorisë gjeometrike të grupeve.

Si përfundim, komisioni për vlerësimin e dorëshkrimit të punimit të diplomës master me

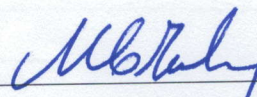
titull **Teorema e Gromovit**

të kandidatit **Bregan Isufi**, konsideron që dorëshkrimi i plotëson kushtet për t'u pranuar si punim i masterit. Prandaj, Fakultetit të Shkencave Matematike Natyrore në Prishtinë, i propozon që ta aprovojë raportin në fjalë, në mënyrë që kandidati Bregan Isufi, ta vazhdojë procedurën e paraparë për mbrojtjen publike.

Prishtinë, më **30.06.2025**

Komisioni:

1. Dr. sc. Muhib Lohaj, kryetar



2. Dr. sc. Qëndrim Gashi, anëtar



3. Dr. sc. Menderes Gashi, anëtar

