Abstrakt

Vetitë e operatorëve në hapësira të Hardit është një temë e hapur për zgjerime duke pasur parasysh faktin se në të është punuar shumë vonë, ndërsa kryesisht puna është bërë në hapësira të Banahut. Në kapitullin e parë do të përmendim kuptimet e përfundimet kryesore të përdorura gjatë punës në kapitujt 2 dhe 3, prandaj edhe nuk do t'i përmendim shumë këtu. Sa i përket kapitullit të dytë, do të flasim për dy koncepte themelore të cilat do t'i hasim edhe në kapitullin e tretë, por në hapësira tjera, e ato janë masa e jokompaktësisë dhe vetia BCAP. Për masën e jokompaktësisë ka përkufizime të ndryshme, ekuivalente, mirëpo atë do ta përkufizojmë në një formë të përgjithshme e pastaj shembujt do t'i nxjerrim më lehtë nga ai përkufizim. Dallimet e vogla në veti të funksionit që i plotëson kushtet për të qenë masë e jokompaktësisë, nuk e prishin saktësinë e asnjë mase të përmendur në temë. Disa nga masat kryesore që do t'i përmendim janë masa e Hausdorfit χ, masa Kuratowski α, masa Phillips ϕ_μ, etj. Do të tregojmë se masat Hausdorf dhe Kuratowski lidhen përmes mosbarazimeve $\chi(B) \leq \alpha(B) \leq 2\chi(B)$, për çdo bashkësi të kufizuar B në hapësirën e Banahut X me dimension të pafundmë. Më vonë do të përmendim edhe masa të tjera, në hapëira të vargjeve, por zbatimi i tyre do të jetë më i vogël. Do të përkufizojmë edhe operatorët kontraktiv dhe kondenzues. Në bazë të kuptimeve të reja, do të jemi në gjendje të tregojmë teoremën *Darbo dhe Sadovski* për operatorët kondenzues të cilët kanë pikë fikse.

E gjithë teoria e ndërtuar më sipër, ka të bëjë me masën e jokompaktësisë të bashkësivë të kufizuara në ndonjë hapësirë të Banahut X. Tema ka një renditje të rrjedhshme të kuptimeve të fituara dhe në pjesë të tjera me radhë të kapitullit të dytë do të përkufizojmë masën e jokompaktësisë për operatorët linearë që përbën njërën nga dy shtyllat e ndërtimit të kapitullit të tretë në hapësira të Hardit. Këtë lloj mase do ta përkufizojmë përmes asaj për bashkësi të kufizuara. Nëse μ paraqet masë të jokompaktësisë për bashkësi të kufizuara, atëherë $\overline{\mu}(T) = \mu(T(U_X))$ është masa e jokompaktësisë për operatorin e kufizuar $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Me marrëveshje do të përdorim vetëm $\mu(T)$, duke nënkuptuar që po flasim për masën e operatorit.

Shtylla tjetër krahas masës së jokompaktësisë është vetia përafruese e operatorëve në hapësira të Banahut. Së pari do të përkufizojmë normën esenciale të operatorit $\|T\|_e = \inf\{\|T-K\| : K \in \mathscr{K}(X,Y)\}$, ku $\mathscr{K}(X,Y)$ është hapësira e operatorëve kompaktë nga X në Y. Shënojmë me $T|_L$ ngushtimin e operatorit T në L. Atëherë funksioni

$$\|T\|_m = \inf\{\|T|_L\| : L \subset X \text{nënhapësirë me } \dim(X/L) < \infty\}$$

është masë e jokompaktësisë. Ekziston lidhja mes kësaj mase dhe asaj të Hausdorfit përmes mosbarazimeve $\frac{1}{2}\chi(T) \leq \|T\|_m \leq 2\chi(T)$, ku sigurisht $\chi(T)$ paraqet masën e Hausdorfit për operatorin T. Le të jetë E një hapësirë e Banahut. Atëherë sipas përkufizimit Astala dhe Tylli, thuhet se E e ka vetinë λ-CAP nëse për çdo bashkësi kompakte $D \subset E$ dhe për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston operatori

kompakt $K \in \mathscr{K}(E)$ me vetinë

$$\sup_{x\in D}\|Kx-x\| \leq \varepsilon; \quad \|K-I\| \leq \lambda.$$

E përmendëm që ky është verzioni i përkufizimit të Astalas dhe Tyllit sepse më vonë e përdorim edhe një tjetër të Karlovich dhe Shargorodsky i cili del të jetë më i zbatueshëm, pavarësisht faktit se kanë dallim të vogël. Nëse E e ka vetinë $\lambda-$CAP për ndonjë $\lambda \geq 1$, atëherë thuhet se E e ka vetinë BCAP.

Thuhet se hapësira e Banahut E e ka vetinë BCAP sipas Karlovich dhe Shargorodsky nëse ekziston një konstante $M \in (0,\infty)$ ashtu që për çdo $\varepsilon > 0$ dhe çdo bashkësi të fundme $F \subset E$, ekziston operatori $T \in \mathscr{K}(E)$ ashtu që

$$\|I-T\| \leq M \text{ dhe } \|y-Ty\|_E < \varepsilon, \text{ për çdo } y \in F. \tag{1}$$

Meqë çdo bashkësi e fundme është kompakte, atëherë kushti i Karlovichit dhe Shargorodsky është më i dobët se ai i Astalas dhe Tyllit. Shënojmë me $M(E)$ infimumin e konstantave M për të cilat vlen (1).

Themi se hapësira e Banahut Z e ka vetinë DCAP nëse ekziston konstanta $M^* \in (0,\infty)$ ashtu që për çdo $\varepsilon > 0$ dhe çdo bashkësi të fundme $F \subset Z^*$, ekziston operatori $T \in \mathscr{K}(Z)$ me vetinë

$$\|I-T\| \leq M^* \text{ dhe } \|z-T^*z\|_{Z^*} < \varepsilon \text{ për çdo } z \in G. \tag{2}$$

Do të shënojmë me $M^*(Z)$ infimumin e konstantave M^* për të cilat vlen (2).

Në këtë kapitull do të flasim edhe për një grup të rëndësishëm operatorësh, që janë operatorët semi-Fredholm dhe Fredholm. Le të jenë X,Y,Z tri hapësira të Banahut. Themi se operatori $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ është në $\Phi_+(X,Y)$ nëse AX është e mbyllur në Y dhe nëse dimensioni $\alpha(A)$ i null hapësirës $N(A)$ është i fundmë. Thuhet se A është në $\Phi_-(X,Y)$ nëse AX është i mbyllur në Y dhe kodimensioni $\beta(A)$ i AX në Y është i fundmë. Operatorët nga $\Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y)$ quhen operatorë semi-Fredholm, ndërsa operatorët në $\Phi(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y)$ quhen operatorë Fredholm.

Krejt në fund e kemi një problem në teorinë e diskretizimit. Do të shohim lidhjen konkrete ndërmjet diskretizimit të një hapësirë të Banahut dhe vetive përafruese $\lambda-$BAP dhe CAP.

Në kapitullin e fundit dhe atë më të rëndësishmin e kësaj teme të shqyrtuar, flitet kryesisht për operatorët në hapësira të Hardit. Me fillim do të japim kuptimin e hapësirës abstrakte të Hardit $H[X]$ të ndërtuar mbi hapësirën e Banahut X, e nëse $X = L^p$, atëherë kemi të bëjmë me hapësirat klasike të Hardit $H^p = H[L^p]$, për $1 < p < \infty$. Do të tregojmë se këto hapësira i kanë vetitë BCAP dhe DCAP me

$$M(H^p) \leq 2^{|1-2/p|} \text{ dhe } M^*(H^p) \leq 2^{|1-2/p|} \tag{3}$$

Studimin do të bëjmë edhe në hapësira të Hardit me peshë, të cilat i shënojmë përmes $H^p(w) = H[L^p(w)]$, ku w paraqet një peshë. Thuhet se w është një peshë nëse $0 < w < \infty$ pothuajse kudo në $\mathbb{T}$, ku $\mathbb{T}$ është rrethi njësi. Vetitë (3) plotësohen edhe nga hapësirat e Hardit me peshë. Për të treguar se hapësirat $H[X]$ dhe $H[X(w)]$ janë izometrikisht izomorfe, së pari e përkufizojmë hapësirën e asociuar dhe për këtë flasim më shumë në kapitullin e parë për t'u ndalur vetëm në vetitë që na nevojiten. Ashtu sic e theksuam, hapësirat e Hardit janë temë e re dhe mjaft e bukur për studim e vetitë e operatorëve në të kanë lënë disa probleme të hapura që kryesisht kanë të bëjnë me gjetjen e vlerave të sakta të konstanteve, si p.sh. $M(H^p)$ apo $M^*(H^p)$, në rastin $1 \leq p \leq \infty$. Tutje, do t'i përmendim edhe hapësirat e Orlicit L^ϕ, ku mes tjerash do të tregojmë se hapësira Hardy-Orlic $H[L^\phi]$ i ka BCAP dhe DCAP me konstante të vlerësuara nga sipër, por vend do të gjejnë edhe hapësirat e Lorencit $L^{p,q}$ dhe problemi i hapur për gjetjen e vlerave të saktë të $M(H[L^{p,q}])$ dhe $M^*(H[L^{p,q}])$.

Nga krejt ky kapitull, përfundimet më të mira i kemi në pjesën e fundit, për operatorët e zhvendosjes prapa $Bf = \frac{f-f(0)}{z}$ të përkufizuar në rruzullin njësi $\mathbb{D}$, për $f \in H^1$. Këtu do të tregojmë se vlerësimi më i mirë i normës së operatorit të zhvendosjes prapa në H^1 ishte fillimisht i barabartë me 1.7047, mirëpo në fund $\|Bf\|_1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\|f\|_1$ na tregon se vlerësimi i kufirit të sipërm është përmirësuar ndjeshëm.