UNIVERSITETI I PRISHTINËS “HASAN PRISHTINA”

FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE-NATYRORE

DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

PROGRAMI MATEMATIKË

ABSTRAKT I PUNIMIT TË DIPLOMËS MASTER

Diametri i grafeve dhe familjet e zgjeruara të grafeve

Mentori: Prof. Dr. sc. Armend Shabani

Kandidati: Shpëtim Mulliqi

Prishtinë, shtator 2024

Abstrakti

Titulli i punimit të diplomës:

Diametri i grafeve dhe familjet e zgjeruara të grafeve

Grafet e zgjeruara (angl. *expander graphs*) janë një lloj i veçantë i grafeve. E dijmë që grafet mund t'i konsiderojmë si një rrjet komunikues. Duke i konsideruar kulmet e grafit si objekte që dëshirojmë t'i lidhim ndërmjet veti, p.sh, kompjuterët, telefonët, etj, ndërsa brinjët e grafit i konsiderojmë si lidhjet në mes tyre, (p.sh kabllot me fije optike, linjat telefonike, etj.), do të donim që të kemi numër të madh të kulmeve, në mënyrë që shumë njerëz (pajisje) do të komunikonin ndërmjet veti, ndërsa në anën tjetër, të kemi sa më pak brinjë që është e mundshme (në mënyrë që të kursejmë kabllot, rrjeti të transmetojë informacionin sa më shpejtë etj). Zgjidhja e këtij problemi, pra të kemi grafe me sa më shumë kulme, sa më pak brinjë, dhe të sigurta (të lidhura mirë) janë pikërisht përkufizimi dhe konstruktimi i familjeve të zgjeruara të grafeve (angl. *expander family*).

Punimi shqyrton rezultat kryesore të fushës ne fjalë duke hulumtuar në monografi të rëndësishme të lëmisë, apo punime që ndërlidhen me temën.

Kapitulli i parë është hyrës dhe në të janë përmbledhur, analizuar dhe sistematizuar rezultate themelore nga teoria e grafeve të rëndësishme për pjesën tjetër të temës. Më konkretisht, përkufizohen grafet e Cayley-it, operatori i fqinjësisë së një grafi dhe vlerat vetjake, matrica e fqinjësisë, prodhimi i matricave të fqinjësisë, etj.

Në kapitullin e dytë përkufizohet konstanta izoperimetrike e një grafi, përmes së cilës më tutje do të përkufizojmë se kur një varg grafesh paraqet familje të zgjeruar të grafeve. Tutje, do të përkufizojmë faktor-grafet, homomorfizmin mes grafeve, gjeneratorët e Schreir-it etj, përmes së cilëve do të tregojmë se nga vargu i grupeve të fundme (G_n) nuk mund të fitohet një familje e zgjeruar e grafeve, nëse ekziston ndonjë faktor-varg i (G_n) (ose ndonjë varg i nëngrupeve me indeks të kufizuar të (G_n)) nga i cili nuk mund të fitohet një e tillë.
Në fund të kapitullit do të marrim një përkufizim ekuivalent (e njohur si Teorema e Rayleigh-Ritz-it) që tregon se kur një varg grafesh është familje e zgjeruar e grafeve, duke shfrytëzuar vlerat vetjake të grafit.

Në kapitullin e tretë, shqyrtohen vetitë e diametrit të grafeve. Fillimisht tregohet se: *Le të jetë* $d \in \mathbb{N}$. *Nëse* (X_n) *është familje e zgjeruar e grafeve* $d -$ *të rregullta, atëherë* (X_n) *ka diametër logaritmik, ku* (G_n) themi se ka diametër logaritmik, nëse $diam(G_n) = O(\log|G_n|)$.
Rezultati i fundit është aparat i përshtatshëm për të vlerësuar se kur një varg grafesh nuk paraqet familje të zgjeruar të grafeve. Disa nga grupet nga tw cilat nuk mund tw fitohet familje e zgjeruar e grafeve janw grupet ciklike C_n, grupet dihedrale D_n, etj.
Tutje, përkufizohet diametri logaritmik i një vargu të grupeve (G_n). Tregohet (me vërtetim kombinatorik) se **nuk ekziston varg i grupeve abeliane nga i cili mund të fitohet një familje e zgjeruar e grafeve.**
Me një shembull do të tregojmë që nuk vlen e anasjellta, pra do të konstruktojmë një varg

grupesh joabeliane nga i cili nuk mund të fitohet familje e zgjeruar e grafeve. Në vazhdim caktohet një klasë edhe më e madhe e vargjeve të grupeve nga të cilat nuk mund të fitohet familje e zgjeruar e grafeve. Më konkretisht tregohet se nëse (G_n) *varg i grupeve të fundme, të tilla që* $|G_n| \to \infty$, *kur* $n \to \infty$ *dhe nëse për çdo* n, G_n *është i zgjidhshëm sipas derivatit të rendit* $\leq k$ *(*$k \in \mathbb{N}$*), atëherë nga* (G_n) *nuk mund të fitojmë familje të zgjeruar të grafeve.*

Në kapitullin e katërt, fillimisht zgjerohet edhe më tej familja e grupeve, nga të cilat nuk mund të fitohet familje e zgjeruar e grafeve. Duke shfrytëzuar prodhimin gjysmëdirekt, përkufizojmë prodhimin kurorë (angl. Ëreath product), përmes të cilit konstruktohet vargu i grupeve CCC_n, (grafet ciklike kub të lidhura) i cili është "pothuajse" familje e zgjeruar e grafeve. Ky varg na jep një ide se në çfarë forme mund të kërkohen vargjet e grupeve nga të cilat mund të fitohet familje e zgjeruar e grafeve.

Në kapitullin e pestë konstruktohet një familje e zgjeruar e grafeve, përmes të ashtuquajturit prodhimi zig-zag. Në kapitullin 4 pamë që grafet kub të lidhura të cikleve CCC_n, "pothuajse" formuan një f.z.g. Grafi CCC_n u konstruktua duke zëvendësuar secilin kulm të hiperkubit n dimensional me një tufë të kulmeve, pra secilit kulm të hiperkubit i korospondon një n- cikël. Kjo ide deri diku përcillet tek konstruktimi i prodhimit zig-zag të dy grafeve X, Y, duke zëvendësuar secilin kulm të X me një tufë korosponduese nga Y.
Prodhimi zig-zag i dy grafeve, përkufizohet si një graf i ri nën disa kushte të caktuara. Pas kësaj analizohet lidhshmëria mes matricës së fqinjësisë dhe vlerat vetjake të grafit X, Y dhe grafit të ri të formuar përmes prodhimit zig-zag XⓩY. Më konkretisht caktohet një kufij i sipërm i $\lambda(X$ⓩY$)$, në varësi të $\lambda(X)$ dhe $\lambda(\mathrm{Y})$, ku $\lambda(X) = max\{|\lambda_1(X)|, |\lambda_{n-1}(X)|\}$, e $\lambda_{n-1}(X) \leq \lambda_{n-2}(X) \leq \cdots \leq \lambda_1(X) \leq \lambda_0(X)$ janë vlerat vetjake të grafit X (të operatorit të fqinjësisë). Tutje marrim këtë konstruktim të një vargu grafesh:
Le të jetë p numër i thjeshtë më i madh se 35. Le të jetë $G = \mathbb{Z}_p^8 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$, grup.
Përkufizojmë $\gamma: \mathbb{Z}_p^2 \longrightarrow G$, si $\gamma(x,y) = (x, xy, xy^2, xy^3, xy^4, xy^5, xy^6, xy^7)$.
Le të jetë $\Gamma = \{\gamma(x,y),\ x, y \in \mathbb{Z}_p\} \subseteq G$ multi-bashkësi.Le të jetë

$$W = Cay(G, \Gamma).$$

Në mënyrë rekrutive përkufizojmë vargun e grafeve (W_n), si vijon.

$$W_1 = W^2, \text{dhe } W_{n+1} = W_n^2 ⓩ\text{Ë},$$

ku W_n^2ⓩË është prodhimi zig-zag sipas çfarëdo zgjedhjeje të etiketës nga W në W_n^2, dhe W_n^2 është graf i përkufizuar në kapitullin 1. Krejt në fund tregohet se vlen rezultati: (W_n) është familje e zgjeruar e grafeve.