



UNIVERSITETI I PRISHTINËS  
"HASAN PRISHTINA"  
FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE NATYRORE

Rr. Eqrem Çabej, 10000 Prishtinë, Republika e Kosovës  
Tel: +381-38-249-873 • E-mail: [fshmn@uni-pr.edu](mailto:fshmn@uni-pr.edu) • [www.uni-pr.edu](http://www.uni-pr.edu)

FSHMN

Ref. nr. 5101

Prishtinë, Dt. 27.09.2023

**RAPORT VLERËSIMI TË DORËSHKRIMIT TË PUNIMIT TE DIPLOMES  
MASTER**

FAKULTETI	FShMN
Departamenti/ Programi	Matematikës
Projekt propozimi	Përafrimi i disa tipave të operatorëve linearë pozitivë të konstruktuar me anë të polinomeve me shumë ndryshore të Lagranzhit
Kandidati	Shega RAMADANI
Mentori	Prof. Asoc. Dr. Behar Baxhaku
Aprovimi i projekt propozimit në Këshillin e Fakultetit	Datë: 23.06.2023 Vendimi nr.: 3017

**Vlerësimi i dorëshkrimit**

Polinomet e Lagranzhit dhe funksionet gjeneruese luajnë një rol shumë të rëndësishëm në shumë degë të matematikës së aplikuar. Në veçanti, ato përdoren për zgjidhjen e klasave të caktuara të ekuacioneve diferenciale të cilat lindin nga një sërë problemesh nga kërkimet operationale dhe proceset stokastike. Chan dhe të tjerët në (Integral Transforms Spec. Funct. 12 (2001), 139-148) përkufizuan dhe më pas shqyrtuan veti shumë interesante të polinomeve me shumë variabla të Lagranzhit, të ashtuquajtura polinomet me shumë variabla të Chan-Chyan-Srivastava(CCS). Dekadat e fundit janë bërë shqyrtime të shumta të shumë polinomeve të njohura ortogonale me shumë variabla. Studiues të shumtë bënë përpjekje për të ndërtuar vargun e operatorëve linearë pozitivë (LPO) duke përdorur polinomet me shumë variabla. Në këtë kuptim, së pari, Erkus dhe Srivastava (Appl Math Comput. 2006;182:213-222) përcaktuan një varg të operatorëve linearë pozitivë duke përdorur polinomet me shumë variabla të Lagranzhit dhe studiuuan sjelljen e përafrimit të këtyre operatorëve me metodën e konvergencës statistikore.

Duhet të përmendim se përdorimi i konvergencës statistikore në teorinë e përafrimeve mundësoi marrjen e rezultate më të forta se ato klasike.

Në këtë punim janë prezantuar disa nga kuptimet themelore të polinomeve bazike të polinomeve me shumë variabla të Lagranzhi-it, më pas duke shfrytëzuar funksionet gjeneruese të këtyre polinomeve janë konstruktuar disa përgjithësime të operatorëve linearë pozitivë. Më pas janë dhënë disa përgjithësime tjera të operatorëve linearë pozitivë duke shfrytëzuar q-analoget e polinomeve me shumë variabla të Lagranzhit. Në veçanti shqyrtohet shpejtësia e konvergencës me anë të modulit të plotë dhe të pjesshëm të vazhdueshmërisë dhe Petree K-funksionalit. Gjithashtu jepet përkufizimi i GBS operatorëve dhe më pas shqyrtohet shpejtësia e konvergencës së këtyre operatorëve me ndihmën e modulit të përzier të lëmueshmërisë për funksionet e vazhdueshme sipas Bögel dhe Bögel të diferencueshëm.

Punimi ka 73 faqe dhe literaturën me 26 njësi bibliografike. Tema shtjellohet në katër kapituj që do ti përshkruajmë si në vijim:

**Kapitulli i parë** është hyrës, në të janë grumbulluar dhe analizuar rezultatet themelore nga polinomet ortogonale si dhe teoria e shumueshmërisë. Në këtë pjesë është dhënë përkufizimi i polinomeve të Lagranzhit me shumë ndryshore si dhe janë shqyrtuar vetitë e këtyre polinomeve të cilat më vonë janë shfrytëzuar për përkufizimin e operatorëve linearë pozitivë si dhe vërtetimin e pohimeve në kapituj tjerë. Si pjesë përbërse e këtij kapitulli është shqyrtimi i operatorëve të përkufizuar nga Erkus me:

$$L_n^{\beta(r)}(f; x) = \left\{ \prod_{i=1}^r (1 - xu_n^{(i)})^n \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_r = m} \cdot \left\{ f \left( \frac{k_r}{n+k_r-1} \right) \prod_{j=1}^r \frac{(u_n^{(j)})^{k_j} (n)_{k_j}}{k_j!} \right\} x^m, \quad (1.1)$$

ku  $r, n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C[0,1]$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $\beta(r) := (u^{(1)}, \dots, u^{(r)})$  ku  $u^{(j)} := \{u_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dhe  $0 < u_n^{(j)} < 1$  për çdo  $n \in \mathbb{N}$  dhe  $j = 1, 2, \dots, r$ , dhe poashtu

$$(\lambda)_k := \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1) \text{ dhe } (\lambda)_0 := 1.$$

Në fakt, përkufizimi i operatorëve në (1.1) është marr nga përkufizimi i polinomeve me shumë variabla CSS (Integral Transforms Spec. Funct. 12 (2001), 139-148):

$$g_m^{\beta(r)}(x_1, \dots, x_r) = \sum_{k_1 + \dots + k_r = m} \left\{ \prod_{i=1}^r (\alpha_i)_{k_i} \frac{x_i^{k_i}}{k_i!} \right\},$$

të cilët përftohen nga

$$\prod_{i=1}^r \{(1 - tx_i)^{-\alpha_i}\} = \sum_{i=1}^{\infty} g_m^{\beta(r)}(x_1, \dots, x_r) t^m, \quad (1.2)$$

ku  $|t| < \min\{|x_1|^{-1}, \dots, |x_r|^{-1}\}$  dhe  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  janë parametra kompleks.

**Në kapitullin e dytë**, merren në konsiderim operatorët linearë pozitivë të dhënë me:

$$K_n^{\beta(r)}(f; x) = \left\{ \prod_{i=1}^r (1 - xu_n^{(i)})^n \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_r = m} (n + k_r - 1) \times \left\{ \left( \prod_{j=1}^r \frac{(u_n^{(j)})^{k_j} (n)_{k_j}}{k_j!} \right) \int_{\frac{k_r}{n+k_r-1}}^{\frac{k_r+1}{n+k_r-1}} f(t) dt \right\} x^m. \quad (1.3)$$

Këta operatorë janë gjeneralizim i tipit integral të Kantorovich-it për operatorët  $L_n^{\beta(r)}$  të dhënë në (1.1), ku të gjithë parametrat janë cekur mësipër.

Me pas, është shqyrtuar edhe një gjeneralizim tjetër rendit s-të për operatorët  $K_n^{\beta(r)}(f; x)$  si në vazhdim:

$$K_{n,s}^{\beta(r)}(f; x) = \left\{ \prod_{i=1}^r (1 - xu_n^{(i)})^n \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_r = m} (n + k_r - 1) \times \left\{ \left( \prod_{j=1}^r \frac{(u_n^{(j)})^{k_j} (n)_{k_j}}{k_j!} \right) \int_{\frac{k_r}{n+k_r-1}}^{\frac{k_r+1}{n+k_r-1}} \left( \sum_{i=0}^s \frac{(x-t)^i f^{(i)}(t)}{i!} \right) dt \right\} x^m,$$

ku  $s = 0, 1, 2, \dots$ , dhe  $f \in C^s[0, 1]$ , hapësira e të gjitha funksioneve të cilat kanë derivat të rendit të s-të të vazhdueshëm. Një gjeneralizim i tillë sikur në (1.4) fillimisht është dhënë nga Kirov dhe Popova (Math. Balkanica (NS), 7(2):149-162, 1993).

Tregohet poashtu se nëse marrim  $s = 0$  në (1.4), atëherë marrim (1.3), pra  $K_{n,0}^{\beta(r)}(f; x) = K_n^{\beta(r)}(f; x)$ .

Duke përdorur nocionin e konvergencës A-statistikore, janë teorema të ndryshme të përafrimit duke përfshirë një rezultat statistikor të tipit Korovkin si dhe është shqyrtuar shpejtësia e konvergencës A-statistikore me ndihmën e modulit të vazhdimësisë, klasës së funksioneve Lipschitz dhe Petree K-funksionalit.

**Në kapitullin e tretë** fillimisht shqyrtohet një zgjerim i operatorëve linearë pozitivë të ndërtuar me anë të polinomeve q-Lagranzh të përkufizuar nga Baxhaku dhe të tjerë në (J. Math. Anal. Appl., 491(2):124337, 2020). Më pas shqyrtohet shpejtësia e konvergencës me anë të modulit të plotë dhe të pjesshëm të vazhdueshmërisë dhe Petree K-funksionalit. Gjithashtu është dhënë përkufizimi i GBS operatorëve dhe më pas shqyrtohet shpejtësia e konvergencës së këtyre operatorëve me ndihmën e modulit të përzier të lëmueshmërisë për funksionet e vazhdueshme sipas Bögel dhe Bögel të diferencueshëm. Së fundi, është shqyrtuar një përgjithësim i rendit të s-të (s që është një numër i plotë jo negativ) i operatorëve të mësipërm dhe më pas studijohet shkallën e përafrimit të këtyre operatorëve për funksionet e klasës Lipschitz të rendit të s-të vazhdimisht të diferencueshëm.

**Në kapitulli i fundit** shqyrtohet një q-analog i operatorëve (1.1) me anë të integralit të tipit Riemann si dhe studjohet konvergjenca e këtyre operatorëve duke shfrytëzuar metodave të shumueshmërisë. Këtu janë dhënë disa lema të rëndësishme të cilat më pas janë shfrytëzuar për vërtetimin e rezultateve kryesore. Më pas jepen teoremat e tipit Korovkin lidhur me përafrimin A-statistikor me peshë për këta operatorë. Në seksionin e fundit, shqyrtohet teorema bazë e konvergencës si dhe jepet një vlerësim i gabimit në përafrim duke përdorur metodën e shumueshmërisë së serive të fuqisë.

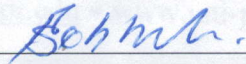
Si përfundim, komisioni për vlerësimin e dorëshkrimit të punimit të diplomës master me titull: **Përafrimi i disa tipave të operatorëve linear pozitivë të konstruktuar me anë të polinomeve me shumë ndryshore të Lagranzhit**, të kandidatës Shega Ramadani, konsideron që dorëshkrimi i plotëson kushtet për t'u pranuar si punim i masterit. Prandaj ky komision i propozon Këshillit të Fakultetit të Shkencave Matematike-Natyrore në Prishtinë që ta aprovojë raportin në fjalë, në mënyrë që kandidatja Shega Ramadani të vazhdojë procedurën e paraparë për mbrojtje publike.

UNIVERSITETI PRISHTINES  
"HASAN PRISHTINA"

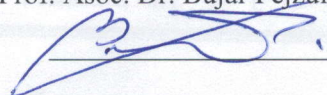
Prishtinë, 27.09.2023

Komisioni:

1. Prof. Asoc. Dr. Behar Baxhaku, kryetar



2. Prof. Asoc. Dr. Bujar Fejzullahu, anëtar



3. Prof. Ass. Dr. Edmond Aliaga, anëtar



FAKULTETI	FSEMIN
Departamenti/ Programi	Matematikës
Projekti propozimi	Përafrimi i disa tipave të operatorëve lineare pozitivë të konstruktuar me anë të polinomeve me shumë ndryshore të Lagranzhit
Kandidati	Shega RAMADANI
Mentori	Prof. Asoc. Dr. Behar Baxhaku
Aprovimi i projekti propozimit në Këshillin e Fakultetit	Date: 23.06.2023 Vendimi nr.: 3017

Vlerësimi i dorëshkrimit

Polinomet e Lagranzhit dhe funksionet gjeneruese luajnë një rol shumë të rëndësishëm në shumë dogë të matematikës së aplikuar. Në veçanti, ato përdoren për zgjidhjen e klasave të caktuara të ekuacioneve diferenciale të cilat lindin nga një sërë problemesh nga kërkimet operacionale dhe proceset stokastike. Çuan dhe të tjerët në (Integral Transforms Spec. Funct. 12 (2001), 139-146) përkufizuan dhe më pas shqyrtuan veti shumë interesante të polinomeve me shumë variabla të Lagranzhit, të ashtuquajtura polinomet me shumë variabla të Chaohua dhe Srivastava (CCS). Dokadat e fundit janë bërë shqyrtime të shumta të shumë polinomeve të njohura ortogonale me shumë variabla. Studiues të shumtë bëjnë përpjekje për të ndërtuar vargjet e operatorëve lineare pozitivë (LPO) duke përdorur polinomet me shumë variabla. Në këtë kuptim, së pari, përdoren Srivastava (Appl Math Comput, 2006; 182:213-222) përcaktuan një varg të operatorëve lineare pozitivë duke përdorur polinomet me shumë variabla të Lagranzhit dhe studiuam sjelljen e përafrimit të këtyre operatorëve me metodën e konvergencës statistikore.